DANIELIS MELANDRI
ET
PAULLI FRISII
ALTERIUS AD ALTERUM
DE THEORIA LUNAE
COMMENTARII.

Victi penetralia Coeli.
Halley.



PARMAE.

EX TYPOGRAPHIA REGIA.
MDCCLXIX.

CELEBERRIMO DOMINO

PAULLO FRISIO

MATHEM. PROFESSORI,

NECNON PLURIUM SCIENTIARUM ACADEMIARUM

SOCIO

DANIEL MELANDER

ASTRONOMIAE PROFESSOR UPSALIENSIS.

FRUSTRA conarer ſignificare verbis quanti faciam honorificam mentionem tum mei, tum Opuſculi ante aliquot annos a me editi, quaſdam annotationes in Newtoni Quadraturam Curvarum continentis, quam ad Dominum FERNER *amicum meum ſingularem feciſti. Ejuſmodi teſtimonium tanti in re Mathematica viri, fortiſſimos, oportet, ſtimulos animo addat, quibus ad plura perſequenda exciter; ſed, ut verum fatear, occupationes, quae ſecundum noſtrae Statuta Academiae munus ſequuntur Profeſſorium, adeo ſunt aſſiduae, ut parum temporis relinquant, quod Scientiae parandis incrementis impendatur. Poſt edi-*

tam Quadraturam Curvarum, in quam varia, quae irrepſerunt etiam errata typographica, benigne, quod precor, excuſabis, cum correctioni typorum praeeſſe ipſe, gravi tum afflictus arthritide, non poteram; nonnulla quidem haud unius argumenti, partim in actis Academiae Scientiarum Stockolmienſis, partim in diſſertationibus hic Upſaliae habitis, tractavi. Verum quia ſunt iſtiusmodi, Academicae, quae dicuntur, diſſertationes ad captum reſpondentium juvenum plerumque accommodandae, intempeſtivum foret tua, VIR CELEBERRIME, *Studia talibus nugis interpellare. Potius memorem, Typographos noſtrae regionis rariſſime ſuis impenſis opera quaedam cujus demumcunque argumenti, imprimenda in ſe ſuſcipere, Mathematica autem prae caeteris recuſare, non modo quod Calculus, & Analyſis, ſollicitioris accurationis multum poſtulet in imprimendo, ſed & praecipue quod pauci admodum apud nos Scientias Mathematicas profiteantur, librosque proinde illis dicatos perquirant. Vix quindecim exemplaria tractatus de Quadratura Curvarum intra Sveciam*

emtores invenerunt. Haec, VIR CELEBERRIME, caufa eſt unice, cur mandato obtemperaturus, quod litteris ad Dominum FERNER iterum miſſis injunxiſti, tuoque adeo ſatisfacturus deſiderio, nonniſi manuſcriptum hocce, quod vides, de Lunae Theoria ſpecimen nunc poſſim mittere. Totus mihi & ex animo gratularer, ſi tibi iſtud non diſplicuerit, at ſi typis inſuper non indignum reputaveris, praeclarum tuae in me benevolentiae documentum habebo. Si forte tuo in Solo non defuerit Typographus, qui huic diſſertatiunculae edendae ſua impenſa auxiliares praebere manus non recuſaverit, ultra 40. vel 50. paginas in forma octavo majori haud putem confecturum; poteritque tum titulus, quem initio poſui, praefigi. Atqui tuo ego ea omnia arbitrio ſubjecero. Valde cupio de legibus Gravitatis opus tuum, cujus ad Dominum FERNER ſchediaſma miſiſti, contueri, aſſidueque volvere, tum quod te opus illud auctorem habiturum ſit, tum quod Geometriae ſuum decus, ſplendoremque illo mihi videaris opere reſtituere. Quae tibi molienti auſim interea fateri ego, noſtri aevi Geometras

suae Analysi plus justo tribuere videri mihi, & Hannibalis instar, quem suae capiebant Alpes, invias per rupes amare potius, arduosque colles, ad metam propositam tendere analytica industria, quam paullulum deflectere, planamque Geometriae viam ac largam persequi. Quanquam juxta haud dissimulem, quod in aliis reprehendo, idem mihi consuetudine adhaesisse vitium, dum aliorum forte exemplis incitatus Analysin potissimum ab ineunte aetate colere jucundum duxerim.

Tuo, CELEBERRIME VIR, favori, & amicitiae commendatus, quoad vixero ero tuus servus humillimus.

Upsaliae die 5. Julii 1768.

LINEAMENTA THEORIAE LUNARIS.

§. I.

SICUT in omni Problemate mechanico virium aestimatio ad earum effectus cognoscendos requiritur, ita etiam in Lunae theoria primum se se offerunt vires illam utcunque cogentes indagandae, ex quibus deinde ad ejus varias motuum mutationes concludendum erit: hae vires per methodos notas in analysim introductae, eandem reddunt magis vel minus implicitam, pro earum variis modificationibus, & artificiis easdem in formas reducendi simplicissimas. Per hanc proprietatem expressionum analyticarum via sternitur ad conclusiones simplices, &, quantum problematis natura permittit, absolutas, faciliores que constructiones. Si secundum haec principia analyseos in Lunae theoria usitatae examen instituatur, deprehenditur 1°. vires Solis turbantes cum viribus telluris Lunam urgentibus ita fuisse compositas, seu potius reductas, ut efficiant duas summas pro motu Lunae in longitudinem, secun-

dum totidem agentes directiones, eademque artificia inservire, si aliae quaelibet vires turbantes essent adsciscendae, ad omnes reducendas secundum illas directiones easdem, eaque ratione viam ad praeparationem analyseos maxime simplicis esse calcatam, cum ulterior virium reductio obtinere nequeat: & 2°. directiones earum virium, quarum una tendit versus centrum telluris, ut centrum principale, & altera in plano motus sita normaliter ad hanc, similiter ut analysi commodissimas eligi. Hoc affatim inde firmatur, quod hac ratione illae vires secundum duas praedictas directiones agentes sint in magna ratione inaequalitatis ad se mutuo, per quam proprietatem, quum motus Lunae a vero parum abludens prima vice determinabitur, tum, etiam aequationes analyticae eam induent formam, ut approximationes, si modo problematis natura absolutam non admittat solutionem, procedant, ut taceam alias quascunque directiones virium eam, dummodo problema analytice erit tractandum, parere calculi molestiam, dum hae in analysin ad Lunae orbitam inveniendam introducendae erunt, ad quam extricandam omnia hucusque cognita calculi subsidia haud sufficient.

§. II.

§. II.

Cum igitur mihi liceat reputare virium Lunam utcunque urgentium reductionem in duas summas, secundum jam descriptas directiones agentes, ut praecipue commodam, ad debitam analysin instituendam pro motu Lunae indagando, quaenam sint illae vires videndum erit. Licet corpora singula planetarii systematis in se mutuo gravia sint; neque Newtonus, neque subsequentes Geometrae Lunae turbationes quaesiverunt ab aliorum quam unius Solis actionibus; neque similiter me judice ad aliquam majorem aut notabilem obtinendam accurationem pertinebit, analysin sat operosam ulterius implicare, considerando plurium corporum actiones concurrentes ad producendas Lunae motus inaequalitates. Si aliquae reliquorum Planetarum actiones in censum venirent, Venus cum Sole inferius conjuncta, & Jupiter oppositus forent attendendi. Haec corpora duplici modo Lunam afficerent, quum scilicet consimiles cum illis a Sole genitis errores producendo, tum etiam aliquas mutationes in ipsis illis a Sole oriundis inaequalitatibus ea ratione efficiendo, quod turbent orbitam telluris a figura elliptica, ita ut pro ejus radio vectore non

idem ac in ellipſi ſubſtituendus eſſet, dum analyſis peragitur. Ad prioris generis turbationes a Veneris actione oriundas quod attinet, facili deprehenditur negotio aequationem maximam quam produceret, unum minutum ſecundum vix ſuperaturam fore, illa ejuſdem generis a Jove derivanda pauca minuta tertia haud excedente. Et cum tanta accuratio hoc in negotio haud deſiderari videatur, ut error 1″ non ſuperet, etiam iſta conſideratio in Lunae theoria praetermitti poterit, ſaltem analyſin illas introducendo vires ulterius componere ſupervacaneum erit, cum errores ex illis oriundi ſemper ſigillatim determinari queant, ſi opus eſſe judicetur. Inaequalitates ab altera illa cauſa proficiſcentes haud minori jure negligi poterunt; quin etiam variatio radii orbitae telluris ab ipſius Lunae repetenda actione nullas in ejuſdem motu ſenſibiles producet aequationes, dum ſcilicet ad tellurem ut centrum ejus referuntur motus mutationes.

§. III.

Hiſce ſic poſitis non niſi duplex ſolvendi problema de motu Lunae indagando erit via. Una ab analyſtis noſtri aevi potiſſimum calcata, & quae vires ratione prius expoſita reductas ſimul conſiderat, eaſque

in analyſin una introducendo, orbitam Lunae ex illis viribus deſcribendam indagat. Altera quae ordiendo a figura circulo finitima, vel ellipſi, vel figura ad orbitam Lunae veram adhuc propius accedente, novas & novas vires addendo per plures correctiones appropinquare continuo docet. Utriuſque hujus methodi calculo & analyſi applicandae, in ſequentibus ſpecimen dare convenit, quum ad oſtendendum quam variis modis in re Mathematicâ ad eaſdem concluſiones perveniri poterit, tum etiam ut ex propriâ analyſi de impedimentis theoriae Lunaris ulterius via analytica promovendae argumentari mihi integrum ſit. Propoſitum itaque ſit.

PROBLEMA I.

Deſcribat Corpus data cum velocitate egrediens a puncto dato M curvam aliquam MCH, & in omni puncto C curvae urgeatur duabus viribus φ & π, priori tendente verſus punctum datum D, poſteriori in plano motus ſita, tendente in directione ad vim priorem normali, & oportet invenire curvam deſcribendam.

SIT arcus AC curvae, quam minimus virium impulſu in A deſcriptus tempuſculo dt, & cum AC arcus coincidat cum recta ducta ab A ad C, producatur AC ad F, ita ut, ſi nullae vires agerent in C,

Corpus describeret CF tempore $dt + ddt$. Agantur jam a puncto D rectae DA, DC, DF, & loco ejus quod Corpus, nulla agente vi in C, esset elapso tempore $dt + ddt$ in F, agat vis φ, & sit Corpus in puncto o illo tempore. Altera autem vis π interea temporis efficiet Corpus promoveri in directione normali ad radium vectorem per aliud spatium evanescens, quod ducendo oH normalem ad DF per ipsam exponatur. Tempore igitur $dt + ddt$ erit Corpus in puncto H, agentibus duabus viribus tum normali π, tum centrali φ, & jungendo puncta C & H, erit recta CH alter arcus evanescens curvæ descriptus tempore $dt + ddt$: ducendo rectam DH centro D intervallis DA, & DC describantur arcus AB, & CK occurrens DF in l, erit ob $FCD = CAD + CDA$, & $KCD = BAD$, angul. $FCl = CAB + ADC$. Ducta igitur Cn efficiente angulum $nCl = CAB$, erit $FCn = ADC$, & triangulum CAB simile triangulo nCl, nec non triangulum FCn simile triangulo ADC. Hisce constructis sit $DA = x$, $BC = dx$, $AB = dy$, $AC = ds$, $KH = dx + ddx$, $CK = dy + ddy$, & cum CF describatur velocitate in C continuata, erit

$CF = ds.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}}$. Sed est $DC : DA :: CF : Cn$, seu $x + dx : x :: ds.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} : \frac{xds}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} = Cn$, & $CA : AB :: nC : Cl$, seu $ds : dy :: \frac{xds}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} : \frac{xdy}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}}$ $= Cl$; erit ergo $oH = lK = CK - Cl = dy + ddy - \frac{xdy}{x + dx} - \frac{xdy.ddt}{dt(x + dx)} = dy.\overline{\frac{dx}{x} + \frac{ddy}{dy} - \frac{ddt}{dt}}$ Rursus est $AB : CB :: Cl : ln$, seu $dy : dx :: \frac{xdy}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} : \frac{xdx}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} = ln$, nec non $DC : CA :: CF : Fn$, hoc est $x + dx : ds :: ds.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} : \frac{ds^2}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} = Fn$, ergo $Fn + nl = Fl = \frac{ds^2 + xdx}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}}$, unde habetur $Fo = Fl - ol = Fl - HK = \frac{ds^2 + xdx}{x + dx}.\overline{1 + \frac{ddt}{dt}} - dx - ddx$, hoc est, ponendo $dx^2 + dy^2$ pro ds^2, & rejiciendo differentias tertïas, orietur $Fo = \frac{dy^2}{x} - ddx + \frac{dxddt}{dt}$. Describuntur vero Fo, & Ho spatia viribus φ & π respective, tempore $dt + ddt$. Ergo $Fo = \varphi.(dt + ddt)^2$, & $Ho = \pi.(dt + ddt)^2$, seu $Fo = \varphi dt^2$, & $Ho = \pi dt^2$, un-

de orientur aequationes $\varphi\, dt^2 = \frac{dy^2}{x} - ddx + \frac{dx\,ddt}{dt}$, & $\pi\, dt^2 = dy \cdot \overline{\frac{dx}{x} + \frac{ddy}{dy} - \frac{ddt}{dt}}$.

Hactenus nulla differentia prima ut constans posita est. Sit itaque dt constans, unde $ddt = o$. Sit praeterea angul. $MDA = z$, unde $ADC = dz$, & $dz = \frac{dy}{x}$, & $ddy = dx\,dz + x\,ddz$. Hisce valoribus suffectis, habentur duae aequationes $\pi\, dt^2 = 2\,dz\,dx + x\,ddz$, & $\varphi\, dt^2 = x\,dz^2 - ddx$, quae solutionem problematis continebunt. Hae aequationes jam eaedem cum iis a Domino CLAIRAUT in tractatu, qui Petropolitani praemio est decoratus, allatis deprehenduntur. Prior harum aequationum dat $\pi\, dz = \frac{2\,dz^2\,dx + x\,dz\,ddz}{dt^2}$. Ad hujus integralem inveniendam inserviet hoc theorema: si fuerit $\pi\, dz = \frac{p\,dz^2\,dx + q\,x\,dz\,ddz}{dt^2}$ erit $\int . \frac{2}{q} x^{\frac{2p}{q} - 1} \pi\, dz + f^2 = \frac{x^{\frac{2p}{q}}\, dz^2}{dt^2}$. Orietur itaque $f^2 + \int . 2\pi x^3\, dz = \frac{x^4\, dz^2}{dt^2}$, seu $dt = \frac{x^2\, dz}{\sqrt{f^2 + 2\int . \pi x^3\, dz}}$.

Loco ipsius dt constantis sit $ddz = o$, & erit $dy = x\,dz$, & $ddy = dx\,dz$, quibus valoribus substitutis in aequatione $\pi\, dt^2 = dy \cdot \overline{\frac{dx}{x} + \frac{ddy}{dy} - \frac{ddt}{dt}}$

habetur $\pi\, d\, t^2 = 2\, d\, x\, d\, z - \frac{x\, d\, z\, d\, d\, t}{d\, t}$, seu $\pi\, d\, z = d\, z^2 \left(\frac{2\, d\, x\, d\, t - x\, d\, d\, t}{d\, t^3}\right)$ cujus aequationis, dum $d\, z$ jam ponitur constans, per consimile Theorema, ac illud dudum allatum, integralis est $d\, t = \frac{x^2\, d\, z}{\sqrt{f^2 + 2 \int \pi\, x^3\, d\, z}}$ ut prius.

Constans assumta f^2 determinatur ex utravis harum aequationum, ponendo $\int \pi\, x^3\, d\, z = 0$, quod fiet in initio motus, seu in M, ergo $f^2 = \frac{x^4\, d\, z^2}{d\, t^2}$, seu $f = \frac{x^2\, d\, z}{d\, t}$, hoc est ponendo in initio motus radium vectorem, seu $D\, M = 1$, & pro $d\, z$ suum valorem $\frac{d\, y}{x}$, erit $f = \frac{d\, y}{d\, t}$; hoc est, si angulus projectionis est rectus, erit $f =$ velocitati initiali; sin vero ille angulus non sit rectus, sit sin. ang. project. $= h$, & erit $M\, N = \frac{d\, y}{h}$, seu $d\, y = h\, d\, s$, unde posita velocitate initiali $= g$, erit $f = \frac{h\, d\, s}{d\, t} = h\, g$.

Aequatio jam $\varphi\, d\, t^2 = \frac{d\, y^2}{x} - d\, d\, x + \frac{d\, x\, d\, d\, t}{d\, t}$ occurrit reducenda; eum in finem sit $\frac{d\, y}{x} = d\, z$ constans, unde ponendo pro $d\, t$ suum valorem inventum, & $d\, z\, d\, x$ pro $d\, d\, y$, ex aequatione $\pi\, d\, t^2 = d\, y \cdot \overline{\frac{d\, x}{x} + \frac{d\, d\, y}{d\, y} - \frac{d\, d\, t}{d\, t}}$ deprehenditur valor ipsius $\frac{d\, d\, t}{d\, t}$

qui pro ipso in priori aequatione suffectus dat $\varphi . \frac{x^4 \, d z^2}{f^2 + 2 \int . \pi \, x^3 \, d z} = x \, d z^2 - d d x + \frac{2 \, d x^2}{x} - \frac{\pi \, x^3 \, d z \, d x}{f^2 + 2 \int . \pi \, x^3 \, d z}$, seu $x \, d z^2 - d d x + \frac{2 \, d x^2}{x} = \left(\varphi + \frac{\pi \, d x}{x \, d z} \right) \times \frac{x^4 \, d z^2}{g^2 h^2 + 2 \int . \pi \, x^3 \, d z}$, unde, ponendo $x = \frac{1}{v}$, fiet $v \, d z^2 + d d u - \frac{d z^2}{g^2 h^2 v^2} \left(\frac{\varphi - \frac{\pi \, d v}{v \, d z}}{1 + 2 \int . \frac{\pi \, d z}{v^3 g^2 h^2}} \right) = o$. Aequatio haec coincidit cum illa a Domino D' ALEMBERT exhibita in *Theorie de la Lune*. Eadem haec aequatio facili quoque negotio deducitur ab aequationibus $\varphi \, d t^2 = x \, d z^2 - d d x$, & $\pi \, d t^2 = 2 \, d z \, d x + x \, d d z$, quarum posterior, sicut prius est inventum, dat $d t = \frac{x^2 \, d z}{\sqrt{g^2 h^2 + 2 \int . \pi \, x^3 \, d z}}$, hae aequationes obtinent dum $d d t = o$. Ponatur ergo $x = \frac{1}{v}$, nec non valor ipsius $d t$ pro ipso in aequatione priori, & fiet $\varphi . \frac{d z^2}{v^4 \left(g^2 h^2 + 2 \int . \frac{\pi \, d z}{v^3} \right)} = \frac{d z^2}{v} + \frac{d d v}{v^2} - \frac{2 \, d v^2}{v^3}$. Dum vero est $d d t = o$, erit $\frac{2 \, d v^2}{v^3} = - \frac{\pi \, d v \, d z}{v^5 \left(g^2 h^2 + 2 \int . \frac{\pi \, d z}{v^3} \right)}$, hoc valore posito pro $\frac{2 \, d v^2}{v^3}$, orietur aequatio $d d v + v \, d z^2 - \frac{d z^2}{g^2 h^2 v^2} \times$

$$\left(\frac{\varphi - \frac{\pi\, d v}{v\, d z}}{1 + 2 \int . \frac{\pi\, d z}{v^3 g^2 h^2}}\right) = o$$, ut prius ; hae reductiones satis simplices videntur . *Q. E. I.*

§. IV.

Aequatio differentialis inventa naturam Curvae describendae exhibens, sub hac forma ulteriorem pati reductionem non videtur , ejusque absoluta integratio tanto minus erit expectanda, cum quantitas $\int . \frac{\pi\, d z}{v^3}$, antequam v in functione aliqua ipsius z determinari poterit , assignari nequeat , relatio autem per quam v in z dabitur , est illa ipsa , quae per hanc aequationem quaeritur . In applicatione autem hujus aequationis ad motus corporum coelestium indagandos , cui fini generaliter per totum systema planetarium aeque inserviet , feliciter ea obtinet conditio, ut vis π exigua sit , & quantitatem $\int . \frac{\pi\, d z}{v^3 g^2 h^2}$ exiguam propterea reddat , ita ut in approximatione instituenda , quae ad aequationem inventam integrandam unica erit via, prima vice negligi queat . Hanc approximationem ordiendo per conjectionem ultimi hujus termini in seriem infinitam , habebitur $d d v + v d z^2 - \frac{\varphi\, z^2}{v^2 g g}$ +

C

$\frac{2\,\varphi\, d z^2}{v^2 gg} \cdot \int . \frac{\pi\, d z}{v^3 gg} + \frac{\pi\, d v\, d z}{v^3 gg} +$ &c. $= o$, ubi $h = 1$, ſeu angulus projectionis eſt rectus; hujus aequationis examen inſtituendo deprehenditur.

1°. Illam per antecedentia conſtrui non poſſe, quandiu terminos continet formae $\overline{\int . \frac{\pi\, d z}{v^3}}\Big|^n$.

2°. Quatenus autem terminus $\frac{\pi\, d z}{v^3}$ eſt admodum parvus, illo rejecto, obtineri orbitam mobilis ex aequatione reſidua a vera parum abludentem.

3°. Aequationem, hujuſmodi terminis rejectis, fieri formae $d d u + N^2 v\, d z^2 + M P\, d z^2 + R\, O\, d v\, d z = o$, ubi M, R, & P, O ſunt functiones ipſarum z & v reſpective, qualium formarum constructio neque in alicujus Analyſtae poteſtate huc uſque eſt, illamque propterea ulterius eſſe limitandam.

4°. Aequationem adhuc praebere terminum $\frac{\pi\, d u\, d z}{v^3 g g}$, qui perinde rejectus efficit quidem orbitam prima vice inveniendam plus recedere a vera, errores autem per quos a deſcribenda differens erit, adhuc erunt exigui, & aequatio fiet formae $d d v + v\, d z^2 - \frac{\varphi\, d z^2}{v^2 gg}$, ſeu potius formae $d d v + N^2 v\, d z^2 + M P\, d z^2 = o$.

5°. Illam aequationem, dum valor ipsius φ substituitur, plures quidem adscifcere terminos, principalem tamen terminum valoris $\frac{\varphi d z^2}{v^2 gg}$ exui variabili v, quae autem in reliquis ejusdem valoris terminis adhuc remanet, verum ea conditione, dum pro v ponitur $K + t$, ubi t est quantitas parva, quod obtinet in planetarum motibus, ut termini a z immunes, & potestatem ipsius t simplicem involventes, reducantur ad terminum formae $N^2 t d z^2$, & aequatio induat hanc formam, $ddt + N^2 t d z^2 + M d z^2 + O t d z^2 + P t^2 d z^2 +$ &c. $+ A t^2 d z^2 + B t^3 d z^2 +$ &c., in qua M, O, P sunt functiones ipsius z; N^2, A, B coëfficientes dati.

6°. Dum valor $K + t$ ponitur pro v, termini $\int \frac{\pi d z}{v^3}$ portionem principalem sumi posse, & referri ad terminum $M d z^2$, dum π determinatur in aliqua functione ipsius z.

7°. Aequationis hujus ultimae constructionem etiam num effugere Analystarum sollertiam, ejus vero proprietatem illam, quod termini ($O t + P t^2 +$ &c.) $d z^2$, nec non ($A t^2 + B t^3 +$ &c.) $d z^2$ tum propter coëfficientes exiguos, tum ob t parvam, unde

ſuperiores ipſius t poteſtates adhuc minores erunt, ſint valde parvi, novam ſubminiſtrare illos rejiciendi terminos rationem, & ex aequatione $ddt + N^2 t dz^2 + M dz^2 = o$ quaerere orbitam quidem magis quam prius a vera diſcrepantem.

Septem hae obſervationes de indole aequationis trium corporum, vulgo ſic dictae, differentialis, eamque conſtruendi ratione, iis qui hujuſmodi analyſeos experti ſunt, prius admodum familiares erant; eas autem adducere volui, cum in ſequentibus quaedam ratiocinia de impedimentis theoriae Lunaris hujusmodi analyſi ulterius promovendae iiſdem inaedificare ſuſcipiam.

§. V.

Prius autem, quam ulterius pergam, ordo jam requirit, ut detur conſtructio aequationis differentialis hujus ultimae, quam unicam omnium, ad quas ducit poſt varias limitationes aequatio trium corporum primitiva, integrare fortaſſis noverint Analyſtae. Propoſitum itaque ſit.

PROBLEMA II.

Integrare aequationem differentialem secundi gradus $ddt + N^2 t dz^2 + M dz^2 = o$, *ubi* dz *constans*, M *functio quaelibet ipsius* z, *&* N^2 *quantitas quaelibet data.*

AD tollendum t ab aequatione propofita, ipfique conciliandam formam integrabilem, pono $t = c^{nz} y$, ubi c eft numerus cujus logaritmus eft unitas, n conftans arbitraria, & y nova variabilis, eritque $dt = nc^{nz} y dz + c^{nz} dy$, & $ddt = n^2 c^{nz} y dz^2 + 2nc^{nz} dy dz + c^{nz} ddy$, quibus valoribus pro t, & ddt fuffectis proveniet $n^2 c^{nz} y dz^2 + 2nc^{nz} dy dz + c^{nz} ddy + N^2 c^{nz} y dz^2 + M dz^2 = o$, hoc eft ponendo, ob arbitrariam n, $n^2 + N^2 = o$, unde $n = \pm N\sqrt{-1}$, erit $ddy + 2n dy dz + c^{-nz} M dz^2 = o$. Sit jam, ut moris eft in reductione aequationum formae hujus ultimae, $dy = q dz$, & $ddy = dq dz$, & habetur aequatio differentialis primi gradus formae Bernoullianae $dq + 2nq dz + c^{-nz} M dz = o$. Quatenus aequatio haec inventa continet duas tantum variabiles q & z,

earumque differentias, indicium eſt utrumque valorem ipſius n aeque ſervire ad aequationem reducendam, verumque proditurum fore integrale utrovis adhibito; retineam ſic valorem poſitivum ipſius n, & erit $dq + 2N\sqrt{-1}.\,q\,dz + c^{-N\sqrt{-1}.\,z}\,M\,dz = o$, quae, uti dictum erat, per formas notas conſtruitur; brevius autem ſic. Ducatur aequatio inventa in $c^{2\sqrt{-1}.Nz}$, & habetur $dq.\,c^{2\sqrt{-1}.Nz} + 2N\sqrt{-1}.\,q\,c^{2\sqrt{-1}.Nz}\,dz + c^{Nz.\sqrt{-1}}\,M\,dz = o$, cujus integralis eſt $c^{2\sqrt{-1}.Nz}\,q + \int. c^{\sqrt{-1}.Nz}\,M\,dz + L = o$, ſeu $q = -c^{-2Nz\sqrt{-1}}\,L - c^{-2\sqrt{-1}.Nz}\int. c^{\sqrt{-1}.Nz}\,M\,dz$; hoc valore pro q ſubſtituto in aequatione $dy = q\,dz$, habetur $dy = -dz.\,c^{-2\sqrt{-1}.Nz}\,L - c^{-2\sqrt{-1}.Nz}\,dz.\int. c^{\sqrt{-1}.Nz}\,M\,dz$, qua integrata orietur $y = \frac{c^{-2\sqrt{-1}.Nz}\,L}{2\sqrt{-1}.\,N} - \int. c^{-2\sqrt{-1}.Nz}\,dz\int. c^{\sqrt{-1}.Nz}\,M\,dz + G$, unde proveniet $t = \frac{c^{-Nz\sqrt{-1}}\,L}{2\sqrt{-1}.\,N} - c^{Nz\sqrt{-1}.}\,G - c^{Nz\sqrt{-1}}.\int. c^{-2Nz\sqrt{-1}}\,dz\int. c^{\sqrt{-1}.Nz}\,M\,dz$.

Conſtantes L & G ſic determinantur. Sit $t = \delta$, dum $z = o$, & habetur $\delta = \frac{L}{2\sqrt{-1}.\,N} + G$. Sit ulterius $q = a$, dum $z = o$, & erit $a = -L$, eſt vero

$q = \frac{dy}{dz}$, & aequatio $dt = N\sqrt{-1}.\, c^{Nz\sqrt{-1}}\, y\, dz +$ $c^{Nz\sqrt{-1}}\, dy$, dat $\frac{dt}{dz} = N\sqrt{-1}.c^{Nz\sqrt{-1}}\, y + c^{Nz\sqrt{-1}}\, \frac{dy}{dz}$, quae aequatio, ponendo $\frac{dt}{dz} = \varepsilon$, dum $z = o$, in quo eodem casu erit $y = t = \delta$, dat $\varepsilon - N\sqrt{-1}.\, \delta = a =$ $- L$, seu $L = N\sqrt{-1}.\, \delta - \varepsilon$, unde $G = \frac{\delta}{2} + \frac{\varepsilon}{2N\sqrt{-1}}$: hos substituendo valores pro L, & G in aequatione inventa, habetur aequatio integralis completa sequens

$$t = \frac{c^{-\sqrt{-1}.\,Nz}\,\delta}{2} - \frac{\varepsilon\, c^{-\sqrt{-1}.Nz}}{2N.\sqrt{-1}} + \frac{c^{\sqrt{-1}.Nz}\,\delta}{2} + \frac{c^{\sqrt{-1}.Nz}\,\varepsilon}{2N.\sqrt{-1}} - c^{\sqrt{-1}.Nz} \int. c^{-2\sqrt{-1}\,Nz}\, dz \int. c^{\sqrt{-1}\,Nz}\, M dz,$$

seu $t = \delta$ Cos. $N z + \frac{\varepsilon \text{ Sin.} Nz}{N} - c^{\sqrt{-1}.Nz} \int.$ $c^{-2\sqrt{-1}.Nz} \int. c^{\sqrt{-1}.Nz}\, M dz$ Q. E. I.

Hoc invento oportet jam reducere terminos in quibus signa deprehenduntur summatoria. Sit igitur $M = H + B.$ Cos. $(A + pz)$, eritque $\int. c^{-Nz\sqrt{-1}}.$ $M dz = \int. c^{-Nz\sqrt{-1}}\, H\, dz + \int. c^{-Nz\sqrt{-1}}\, dz\, B.$

$$\frac{c^{(A+pz)\sqrt{-1}} + c^{-A+pz\sqrt{-1}}}{2} = - \frac{c^{-Nz\sqrt{-1}}\, H}{N\sqrt{-1}} + \frac{c^{(A+pz-Nz)\sqrt{-1}}\, B}{2(p-N)\sqrt{-1}} + \frac{c^{(-A-pz-Nz)\sqrt{-1}}\, B}{2(-p-N)\sqrt{-1}}$$

$+\frac{H}{N\sqrt{-1}.}-\frac{c^{A\sqrt{-1}}B}{2(p-N)\sqrt{-1}}-\frac{c^{-A\sqrt{-1}}B}{2(-p-N)\sqrt{-1}}$, ponendo scilicet, dum correctio est facienda, $\int. c^{-Nz\sqrt{-1}}M\,dz = o$, dum $z=o$. Erit similiter $\int. c^{2\sqrt{-1}.Nz}dz$ $\int. c^{-Nz\sqrt{-1}}M\,dz = \frac{c^{Nz\sqrt{-1}}H}{N^2}-\frac{c^{2Nz\sqrt{-1}}H}{2N^2}+$

$$\frac{c^{(A+pz+Nz)\sqrt{-1}}B}{2(N^2-p^2)}+\frac{c^{(-A-pz+Nz)\sqrt{-1}}B}{2(N^2-p^2)}-\frac{c^{(A+2Nz)\sqrt{-1}}B}{2.\,2N(N-p)}-\frac{c^{(-A+2Nz)\sqrt{-1}}B}{2.\,2N(N+p)}-\frac{H}{2N^2}-\frac{c^{A\sqrt{-1}}B}{2(N^2-p^2)}-\frac{c^{-A\sqrt{-1}}B}{2(N^2-p^2)}+\frac{c^{A\sqrt{-1}}B}{2.2N(N-p)}-\frac{c^{-A\sqrt{-1}}B}{2.\,2N(N+p)},$$

correctionem etenim similiter, ac prius conficiendo, erit igitur $c^{-Nz\sqrt{-1}}\int.c^{-2Nz\sqrt{-1}.}dz\int.c^{\sqrt{-1}.Nz}M\,dz=\frac{H}{N^2}-$

$$\frac{\text{Cos. }Nz.\,H}{N^2}+\frac{B.\text{ Cos. }(A+pz)}{N^2-p^2}-\frac{B}{2N}\left(\frac{\text{Cos.}(A+Nz)}{N-p}+\frac{\text{Cos.}(A-Nz)}{N+p}\right),$$

& ob id $t=\delta\text{ Cos. }Nz+\frac{\varepsilon\text{ Sin. }Nz}{N}+$

$$\frac{H.\text{Cos.}Nz-H}{N^2}-\frac{B.\text{ Cos. }(A+pz)}{N^2-p^2}+\frac{B}{2N}\left(\frac{\text{Cos.}(A+Nz)}{N-p}+\frac{\text{Cos.}(A-Nz)}{N+p}\right).$$

Observatio I.

Si esset $M = H + B.\ \mathrm{Cos.}\ (A + p z) + C.\ \mathrm{Cos.}\ (D + q z) + \&c. + G.\ \mathrm{Sin.}\ (L + s z) + P.\ \mathrm{Sin.}\ (Q + k z) + \&c.$, prodiret $t = \delta\ \mathrm{Cos.}\ N z + \frac{\varepsilon\ \mathrm{Sin.}\ N z}{N} + \frac{H.\ \mathrm{Cos.}\ N z - H}{N^2} - \frac{B.\ \mathrm{Cos.}\ (A + p z)}{N^2 - p^2} + \frac{B}{2N}\left(\frac{\mathrm{Cos.}(A + N z)}{N - p} + \frac{\mathrm{Cos.}(A - N z)}{N + p}\right) - \frac{C.\ \mathrm{Cos.}\ (D + q z)}{N^2 - q^2} + \frac{C}{2N}\left(\frac{\mathrm{Cos.}(C + N z)}{N - q} + \frac{\mathrm{Cos.}(C - N z)}{N + q}\right) + \&c. - \frac{G.\ \mathrm{Sin.}\ (L + s z)}{N^2 - ss} + \frac{G}{2N}\left(\frac{\mathrm{Sin.}(L + N z)}{N - s} + \frac{\mathrm{Sin.}\ (L - N z)}{N + s}\right) + \&c.$

Observatio II.

Si in priori integratione pro n assumtus fuisset valor negativus, seu $- N\sqrt{-1}$, prodiisset $t = \delta\ \mathrm{Cos.}\ N z + \frac{\varepsilon.\ \mathrm{Sin.}\ N z}{N} - c^{-N z \sqrt{-1}} \int . c^{2 N z \sqrt{-1}} \int . c^{-N z \sqrt{-1}} M d z$, quae aequatio reducta modo consimili, ac jam factum est, eundem dat valorem ultimi termini, in quo signa inveniuntur summatoria; ex sola inspectione hujus termini colligitur quoque eum eundem praebere debere valorem.

Observatio III.

Tanquam in transcursu verbo nominare licet aequationem differentialem $d d t \pm N^2 t d z^2 + R d t d z +$

$M d z^2 = o$, designante R quantitatem quamvis datam , quam aequationem Dominus D'ALEMBERT, (*Systeme du Monde Art. 267.*) proponit , per hanc methodum similiter integrari.

IDEM ALITER.

Quamprimum per substitutionem aliquam deprehenditur quantitates imaginarias ingredi aequationem differentialem , indicium est aequationem integralem quantitates a circulo ortas , ut Sinus , & Cosinus &c. involvere posse . Ejusmodi igitur quantitates assumere in substitutione prima , dummodo ad id idoneae eligantur , convenit . Sit igitur $t = y$ Cos. $p z$, ubi y nova variabilis , & p quantitas arbitraria , eritque $d t = - p$ Sin. $p z . y d z + d y$ Cos. $p z$, & $d d t = - p^2$ Cos. $p z . y d z^2 - 2 p$. Sin. $p z . d y d z +$ Cos. $p z . d d y$. Hisce substitutis habetur aequatio $- p^2 y d z^2$. Cos. $p z$ $- 2 p d y d z$. Sin. $p z + d d y$. Cos. $p z + N^2 y d z^2$. Cos. $p z + M d z^2 = o$. Haec aequatio , ob assumtam arbitrariam p , faciendo $- p^2 + N^2 = o$, dat $p = N$, & $- 2 N d y d z$. Sin. $N z + d d y$ Cos. $N z + M d z^2$ $= o$. Sit jam $d y = q d z$, unde habetur $d q$ Cos. $N z$ $- 2 N q d z$ Sin. $N z + M d z = o$, aequatio haec du-

cta in Cos. Nz dat $\frac{\text{Cos. } 2Nz \cdot dq}{2} + \frac{dq}{2} - N$. Sin. $2Nz \cdot q\,dz + \text{Cos. } Nz \cdot M\,dz$, cujus integralis, debite corrigendo per additionem conſtantis, eſt $\frac{q \cdot \text{Cos. } 2Nz}{2} + \frac{q}{2} + \int M\,dz \cdot \text{Cos. } Nz = A$, unde $q = \frac{2A}{\text{Cos.} 2Nz + 1} - \frac{2}{\text{Cos. } 2Nz + 1} \int M\,dz \cdot \text{Cos. } Nz$, & ob id, $dy = \frac{2A\,dz}{\text{Cos.} 2Nz + 1} - \frac{2\,dz}{\text{Cos. } 2Nz + 1} \int M\,dz \cdot \text{Cos. } Nz$, & $y = \int \frac{2A\,dz}{\text{Cos.} 2Nz + 1} - \int \frac{2\,dz}{\text{Cos.} 2Nz + 1} \int M\,dz \cdot \text{Cos. } Nz + B$, unde proveniet $t = y \text{ Cos. } Nz = B \text{ Cos. } Nz + \frac{A}{N} \text{Sin. } Nz - \text{Cos. } Nz \cdot \int \frac{dz}{\text{Cos.} (Nz)^2} \int Mdz \cdot \text{Cos. } Nz$.

Ad inveniendum conſtantes A & B, ſit $t = \delta$, dum $z = o$, & fiet $t = B = \delta$. Sit rurſus $q = a$, dum $z = o$, & fiet in hoc caſu $q = a = A$, eſt vero $q = \frac{dy}{dz}$, & aequatio $dt = dy \text{ Cos. } pz - p \cdot \text{Sin. } pz \cdot y\,dz$ dat $\frac{dt}{dz} = \frac{dy}{dz} \text{Cos. } pz - p \cdot \text{Sin. } pz \cdot y$, hoc eſt $\frac{dt}{dz} = \frac{dy}{dz}$, dum $z = o$. Sit itaque $\frac{dt}{dz} = \varepsilon$, dum $z = o$, & erit $a = A = \varepsilon$, & aequatio integralis completa evadet $t = \delta \text{ Cos. } Nz + \frac{\varepsilon}{N} \text{ Sin. } Nz - \text{Cos. } Nz \int \frac{dz}{(\text{Cos. } Nz)^2} \int M\,dz \cdot \text{Cos. } Nz$, in quo ultimo termino

reducendo obſervandum eſt, correctiones ſimiliter fieri, ac in ſuperiori integratione, ſcilicet ut $\int. M dz. \text{Cos. } Nz$, & $\int. \frac{dz}{(\text{Cos. } Nz)^2} \int. Mdz. \text{Cos. } Nz$ evaneſcant, dum $z = o$.

Sit jam, ut prius, $M = H + B. \text{Cos. } (A + pz)$, & invenitur $\int. M dz. \text{Cos. } Nz = \frac{H. \text{Sin. } Nz}{N} + \frac{B. \text{Sin. } (A + pz + Nz)}{2(p + N)} + \frac{B. \text{Sin. } (A + pz - Nz)}{2(p - N)} - \frac{B. \text{Sin. } A}{2(p + N)} - \frac{B \text{ Sin. } A}{2(p - N)}$. Hinc erit $\frac{dz}{(\text{Cos. } Nz)^2} \int. M dz. \text{Cos. } Nz = \frac{H dz \text{ Sin. } Nz}{N(\text{Cos. } Nz)^2} + \frac{B dz}{2(\text{Cos. } Nz)^2} . \left(\frac{\text{Sin. } (A + pz + Nz)}{p + N} + \frac{\text{Sin. } (A + pz - Nz)}{p - N} \right) - \frac{B dz. \text{ Sin. } A}{2(p + N)(\text{Cos. } Nz)^2} - \frac{B dz. \text{ Sin. } A}{2(p - N)(\text{Cos. } Nz)^2}$. Ad hos terminos integrandos, illi ſeorſim tractentur. Habetur ergo 1°. $\int. \frac{Hdz. \text{Sin. } Nz}{N(\text{Cos. } N. z)^2} = \frac{H}{NN} \text{ ſec. } Nz - \frac{H}{NN} = \frac{H}{NN. \text{ Cos. } Nz} - \frac{H}{NN}$. 2°. eſt $\frac{B dz}{2(\text{Cos. } Nz)^2} \left(\frac{\text{Sin.} (A + pz + Nz)}{p + N} + \frac{\text{Sin.} (A + pz - Nz)}{p - N} \right) = \frac{NB dz. \text{ Sin. } Nz. \text{ Cos.} (A + pz)}{(N^2 - p^2)(\text{Cos. } Nz)^2} - \frac{pBdz. \text{Sin.} (A + pz) \text{Cos.} Nz}{(N^2 - p^2)(\text{Cos. } Nz)^2}$, ergo $\int. \frac{B dz}{2(\text{Cos. } Nz)^2} \left(\frac{\text{Sin.} (A + pz + Nz)}{p + N} + \frac{\text{Sin.} (A + pz - Nz)}{p - N} \right) = \frac{B. \text{ Cos.} (A + pz). \text{ ſec. } Nz}{N^2 - p^2} + \text{Conſt. } M = \frac{B. \text{Cos.} (A + pz)}{(N^2 - p^2) \text{Cos.} Nz}$

$- \frac{B.\mathrm{Cos}.A}{N^2 - p^2}$. 3°. eſt $- \int. \frac{B\,d\zeta.\mathrm{Sin}.A}{2(p+N)(\mathrm{Cos}.N\zeta)^2} -$ $\int. \frac{B\,d\zeta.\mathrm{Sin}.A}{2(p-N)(\mathrm{Cos}.N\zeta)^2} = \frac{B.\mathrm{Cos}.(A+N\zeta)}{2.2.N(p+N)\mathrm{Cos}.N\zeta} -$ $\frac{B.\mathrm{Cos}.(A-N\zeta)}{2.2.N(p+N)\mathrm{Cos}.N\zeta} + \frac{B.\mathrm{Cos}.(A+N\zeta)}{2.2.N(p-N)\mathrm{Cos}.N\zeta} -$ $\frac{B.\mathrm{Cos}.(A-N\zeta)}{2.2.N(p-N)\mathrm{Cos}.N\zeta}$. Colligendo hos valores, eosque ducendo in Cos. $N\zeta$, emerget Cos. $N\zeta \int. \frac{d\zeta}{(\mathrm{Cos}.N\zeta)^2}$ $\int. M\,d\zeta.\mathrm{Cos}.N\zeta = \frac{H}{NN} - \frac{H.\mathrm{Cos}.N\zeta}{NN} + \frac{B.\mathrm{Cos}.(A+p\zeta)}{N^2-p^2}$ $- \frac{B}{2N}\left(\frac{\mathrm{Cos}.(A+N\zeta)}{N-p} + \frac{\mathrm{Cos}.(A-N\zeta)}{N+p}\right)$. Hinc colligitur $t = \delta\ \mathrm{Cos}.N\zeta + \frac{\varepsilon\ \mathrm{Sin}.N\zeta}{N} + \frac{H.\mathrm{Cos}.N\zeta - H}{NN}$ $- \frac{B.\mathrm{Cos}.(A+p\zeta)}{N^2-p^2} + \frac{B}{2N}\left(\frac{\mathrm{Cos}.(A+N\zeta)}{N-p} + \frac{\mathrm{Cos}.(A-N\zeta)}{N+p}\right)$ omnino ut in priori integratione, ſicut opportuit. *Q.E.I.*

Ex occaſione integrationis aequationis $ddt + N^2\ t\,d\zeta^2 + M\,d\zeta^2 = o$, tanquam in tranſcurſu annotare convenit, ſubſtitutiones ejuſdem fere indolis ad conſtructiones plurium aequationum cum ſucceſſu adhiberi. Haud ignoro integrandi methodos per ſubſtitutiones procedentes eſſe particulares, ſeu ad certos caſus applicandos, magis vero generales eſſe illas, quae per multiplicationes efficiantur. Integrationes au-

tem quae per ſubſtitutiones fiunt, ſaepenumero breviori & concinniori via ad debitas ducunt concluſiones. Exempla vero quaedam integrationum hujus modi, quae per ſubſtitutiones conſimiles fere ac in praecedentibus peraguntur, ſunto ſequentia.

1°. Propoſuerat Dominus KRAFT pro anno 1755. in Commentariis Petropolitanis novis Tom. V. pag. 238. *Methodum* quam vocat *ſe ipſam confirmantem*; ad cujus methodi applicationem oſtendendam proponit, aequationem differentio-differentialem $m.\overline{m-1}.\, y^2 dx^2 = x^2 y ddy + n.\overline{n-1}.\, x^2 dy^2$ integrandam, cujus integrale minus apte indicat fore aequationem $ax^m = by^n$, per quod ſpecimen etiam de indole ipſius methodi judicare licet. Propoſita autem ſit aequatio haec integranda ſub hac forma $ay^2dx^2 = x^2yddy + bx^2dy^2$, ubi dx conſtans. Pono $y = tx^m$, ubi t nova variabilis, & m quantitas arbitraria, & habetur $dy = x^m dt + mtx^{m-1}dx$; $ddy = x^m ddt + 2mx^{m-1} dxdt + m.\overline{m-1}.\, tx^{m-2}dx^2$, nec non $dy^2 = x^{2m}dt^2 + 2mtx^{2m-1}dxdt + m^2t^2x^{2m-2}dx^2$, quibus valoribus ſubſtitutis invenitur $(a - m.\overline{m-1} - bm^2)$ $t^2x^{2m}dx^2 = tx^{2m+2}ddt + 2m.\overline{b+1}.\, tx^{2m+1}$

$dx\,dt + bx^{2m+2}dt^2$. Sit itaque $a - m.\overline{m-1} - bm^2 = o$, & $b + 1 = n$, & erit $m = \frac{1}{2n} \pm \frac{1}{n}\sqrt{an + \frac{1}{4}}$ & habetur $\frac{ddt}{dt} + \frac{2mndx}{x} + \frac{bdt}{t} = o$, quae aequatio integrata, & correcta dat Log. $\frac{dt}{dx} + 2mn$. Log. $x + b$. Log. $t =$ Log. A, seu $\frac{dt}{dx}.x^{2mn}.t^b = A$, seu $Ax^{-2mn}dx = t^b\,dt$, quae iterum integrata praebet $\frac{Ax^{1-2mn}+B}{1-2mn} = \frac{t^n}{n}$; hoc est, ponendo $\frac{y^n}{x^{mn}}$ pro t^n, & valorem ipsius m pro ipso, $y^n = \pm x^{\frac{1}{2}}(Dx^{\pm\sqrt{an+\frac{1}{4}}} + Cx^{\pm\sqrt{an+\frac{1}{4}}})$, ubi $D = \frac{nA}{1-2mn}$, & $C = \frac{nB}{1-2mn}$.

Si fuerit $\sqrt{an+\frac{1}{4}}$ numerus rationalis, aequatio erit ad curvam algebraicam, si irrationalis, ad exponentialem, seu, ut LEIBNITIUS loqui amabat, interscendentem. Si fuerit $\sqrt{an+\frac{1}{4}}$ impossibilis, sit $\sqrt{-an+\frac{1}{4}} = q\sqrt{-1}$, & mutatur aequatio inventa in hanc $y^n = x^{\frac{1}{2}}\left(\frac{Ax^{q\sqrt{-1}}+Bx^{-q\sqrt{-1}}}{2q\sqrt{-1}}\right)$, & invenietur faciendo $\frac{A}{2q\sqrt{-1}} = \frac{E}{2} + \frac{F}{2\sqrt{-1}}$, & $\frac{B}{2q\sqrt{-1}} = \frac{E}{2} - \frac{F}{2\sqrt{-1}}$, po-

nendoque N esse numerum, cujus Logaritmus est unitas, $y^n = x^{\frac{1}{2}} (E \text{ Sin. Log. } x^q + F \text{ Cos. Log. } x^q)$.

2°. Aequatio haec a Domino KRAFT proposita una est species aequationum, quae sub hac continentur forma $a y^2 dx^2 + b x^2 dy^2 + c x y dy dx + f x^2 y ddy = o$; haec vero aequatio ultima modo consimili reducitur. Ponendo etenim $y = t x^m$, invenitur $m = \frac{f-c}{2f+2b} \pm \frac{1}{f+b} \sqrt{\frac{\overline{c-f}|^2}{4} - a.\overline{f+b}} = p \pm \sqrt{q-r}$ brevitatis ergo. Fiet igitur $(c + 2b - 2f.\overline{p \pm \sqrt{q-r}}) \frac{dx}{x} + \frac{b dt}{t} + \frac{f ddt}{dt} = o$, quae similiter ac in articulo praecedenti ulterius reducitur.

3°. Modo consimili aequatio $a y^3 dx^3 + b x^2 y dx dy^2 + c x^3 dy^3 = o$ construitur. Ponendo etenim $y = t x^m$, & faciendo $a + b m^2 + c m^3 = o$, ex qua aequatione ipsius m tres valores erunt eliciendi, nec non $b + 2cm + c = A$, & $b + bm + 3cm^2 = B$, orietur $A x t dx dt + c x^2 dt^2 + B t^2 dx^2 = o$, quae aequatio jam secundi gradus est una species aequationum contentarum sub forma in Articulo praecedenti, & integratur faciendo $t = r x^n$ ut prius.

4°. Proponatur aequatio primi gradus differentialis $ay^{p}dx+Xdx+bxy^{p-1}dy=o$, in qua aequatione p est numerus quilibet, & X functio quaevis ipsius x. Ponatur, ut prius, $y=tx^{\frac{m}{\overline{a+mb}}}$ unde orietur $t^{p}x^{mp}dx+Xdx+bx^{mp+1}t^{p-1}dt=o$, hoc est, faciendo $a+mb=o$, seu $m=-\frac{a}{b}$, habetur $\frac{Xdx}{bx^{1-\frac{ap}{b}}}=t^{p-1}dt$, per quadraturas construenda. Dividendo aequationem propositam $ay^{p}dx+Xdx+bxy^{p-1}dy=o$ per xy^{p-1}, & ponendo $1-p=\beta$, orietur $ay\frac{dx}{x}+y^{\beta}X'dx+bdy=o$, quae comprehenditur sub forma Bernoulliana $dv=Pvdx+v^{m}Qdx$. Omnes itaque aequationes, quae ista ratione sub hac forma Bernoullii comprehenduntur, ut in iis sit $P=\frac{c}{x}$, per hanc methodum integrantur.

5°. Sit aequatio $ay^{p}x^{n-1}dx+bx^{n}y^{p-1}dy+cydx+fxdy=o$ integranda. Sit, ut prius, $y=tx^{m}$, & ponatur $m=-\frac{a}{b}$, unde dividendo aequationem sic prodeuntem per $\overline{c-\frac{af}{b}}\,.\,tx^{-\frac{a}{b}}$,

orietur $dx + \frac{x\,dt}{c - \frac{af}{b}\cdot t} + \frac{b t^{p-2} x^{n - \frac{ap}{b} + \frac{a}{b}}}{c - \frac{af}{b}} = o$, ſeu etiam, ſi ponatur $m = -\frac{c}{f}$, & aequatio tum prodiens dividatur per $\overline{a - \frac{bc}{f}} \cdot t^{p} x^{n - \frac{pc}{f} - 1}$, aequatio $dx + \frac{bx\,dt}{a - \frac{bc}{f}\cdot t} + \frac{x^{2 - n + \frac{pc}{f} - c}\,dt}{a - \frac{bc}{f}\cdot t^{p}} = o$. Utraque harum aequationum eſt formae $dy + y^{\beta} X' dx + \frac{\alpha y\,dx}{x} = o$, cujus reductio in Articulo praecedenti continetur. Aequatio allata $a y^{p} x^{n-1} dx + b y^{p-1} x^{n} dy + c y\,dx + f x\,dy = o$ reducitur in hanc $dx + \frac{x}{y}\left(\frac{b y^{\alpha} x^{\beta} + f}{a y^{\alpha} x^{\beta} + c}\right) \cdot dy = o$, dum ponitur $p - 1 = \alpha$, & $n - 1 = \beta$. Sed aequatio haec comprehenditur ſub forma $dx = \frac{a x\,dy}{y} \varphi\left(x^{q} y^{s}\right)$, cujus conſtructiones dat Dominus D'ALEMBERT ope aequationis $z = \frac{dx}{dy}$ (*Memoires de l'Academie des Sciences de Berlin Année 1748.*). Sed ad propoſitum revertam.

§. VI.

Quae hactenus delibata sunt applicantur ad inveniendos motus Lunae in longitudinem. Pauca circa variationem inclinationis, & cum illa connexum motum nodorum addam. Revocando constructiones Newtoni in Prop. 30. & 34. Lib. III. Princip. Phil. Nat. ad calculum analyticum, easque applicando ad figuram quamvis ovalem, uti in schemate (*Fig.* 2.), dicendoque ang. $m\,T\,l = d\,\xi$, radium vectorem $P\,T = x = \frac{1}{u}$, vim turbantem $= \pi$, ang. $S\,T\,n = v$, $P\,T\,N = V$, & $P\,T\,M = d\,z$. Invenitur facile, sicut etiam Dominus Clairaut exposuerat, $d\,\xi = \int. \frac{u\,\pi\,d\,t^2.\,\text{sin.}\,v.\,\text{sin.}\,V.}{d\,z}$. Pro variatione inclinationis invenienda demittatur $M\,p$ normalis ad planum Eclipticae, sitque variatio illa inclinationis $= d\,n$, & deprehenditur $\frac{d\,n}{\text{sin.}\,n} = d\,\xi.\text{Cos.}\,V.$ Referendo secundum Dominum d'Alembert hos calculos ad planum Eclipticae, ang. $p\,T\,G$ sustinebit vices ang. V, & cum sit $\frac{d\,n}{\text{sin.}\,n} = \frac{d\,\xi\,.\,\text{cos.}\,V}{\text{sin.}\,V}$, invenitur $\frac{d\,n\,.\,\text{sec.}\,n}{\text{sin.}\,n} = \frac{d\,\xi\,.\,\text{cos.}\,V}{\text{sin.}\,V}$, hoc est, faciendo $m =$ Tang. n, $\frac{d\,m}{m} = \frac{\pi\,d\,t^2.\,u.\,\text{cos.}\,V.\text{sin.}\,v}{d\,z}$, ut habet Dominus d'Alembert.

Ad aequationem $\frac{dn}{\text{Sin.}\, n} = \frac{d\xi \,.\, \text{cos.}\, v}{\text{sin.}\, v}$ quod attinet, modus Domini CLAIRAUT eam tractandi ſatis inopinatus mihi videtur. Methodo directa eam integrando invenitur

$$\text{Sin.}\, n = 2\, h\, N^{\int . d\xi \frac{\text{cos.}\, v}{\text{sin.}\, v}} \left(1 + \overline{h N^{\int . d\xi \frac{\text{cos.}\, v}{\text{sin.}\, v}}}\right]^2 \Big)^{-1},$$

$$\text{ſeu Tang.}\, n = 2 h\, N^{\int . d\xi \frac{\text{cos.}\, v}{\text{sin.}\, v}} \left(1 - \overline{h N^{\int . d\xi \frac{\text{cos.}\, v}{\text{sin.}\, v}}}\right]^2 \Big)^{-1}.$$

Reductionem harum aequationum ulteriorem, ut, partim in aliorum ſcriptis traditam, partim etiam, quod ad has ultimas attinet, ſatis obviam, poſt quam in has formas reducta eſt, omitto.

§. VII.

Analyſi hac expoſita, ordo jam exigit, ut principia ex quibus ad hujus Analyſeos applicationem ad motus Lunares inveniendos, & propterea ad ejus uſum in Lunae Theoria concluditur, brevi ſubjiciantur examini; obſervanda autem duco ſequentia.

1°. Orbita Lunae, ſicut prius eſt oſtenſum, exprimitur aequatione differentiali $ddv + v d\zeta^2 - \frac{\varphi d\zeta^2}{v^2 gg} + \frac{2\varphi d\zeta^2}{v^2 gg} \int . \frac{\pi d\zeta}{v^3 gg} + \frac{\pi dv d\zeta}{v^3 gg} + \&c. = A$. Haec aequatio, ponendo $K + t$ pro v, & valorem proximum ipſius φ in terminis primis pro ipſo, in quo valore exhi-

bendo, mutuo accipiam illum a Domino D'ALEMBERT (*Art.* 42. *Syſteme du Monde*) expreſſum, migrat in hanc $ddt + tdz^2 + \frac{3m^2T + Ldz^2}{4gg} - \frac{3m^2T + Ldz^2}{4gg}$. Cos. $(2z - 2\xi) + \frac{Sdz^2}{2B'^3gg} \cdot \left(\frac{1}{K^3} - \frac{3t}{K^4} + \frac{6tt}{K^5}\right) -$ &c. $+ \frac{3S.dz^2.\,\text{Cos.}(2z - 2z')}{2B'^3gg} \cdot \left(\frac{1}{K^3} - \frac{3t}{K^4} + \frac{6tt}{K^5}\right) -$ &c. $- \frac{9S.\text{Cos.}(z - z')dz^2}{8.B'^4gg} \cdot \left(\frac{1}{K^4} - \frac{4t}{K^5} + \frac{10tt}{K^6}\right) -$ &c. $+ \frac{2\varphi dz^2}{v^2gg} \int. \frac{\pi dz}{v^3gg} + \frac{\pi dvdz}{v^3gg} +$ &c. $= o = B$.

Methodus uſitata, & ultra quam nullus Analyſta huc uſque artem Analyticam promotam reddiderat, in eo conſiſtit, ut ex eâ aequatione eligantur omnes termini quorum ſumma praebet aequationem formae $ddt + N^2tdz^2 + Mdz^2 = o$, negligendo reliquos, ut admodum exiguos, & ex illâ aequatione tum prodeunte, quae dicatur C, per ejus conſtructionem invenietur t, & proinde $K + t$, ſeu v. Invento hoc valore, methodus exigit, quo magis accuratus valor ipſius v inveniatur, ut termini neglecti reſumantur, valorque ipſius v, qui per hanc conſtructionem dabitur in z, pro v in reliquis aequationis terminis ſubſtituatur, quo pacto aequatio primitiva ad orbitam Lunae differentia-

lis fiet formae prius inventae integrabilis, & approximatio, quantum opus judicetur, per continuatas correctiones expedite perget. Haec methodus approximandi radium vectorem orbitae Lunaris, in statu artis Analyticae praesenti fortassis unica erit, si scilicet omnes vires simul erunt in analysin introducendae, & simul ita esse comparata videtur, ut calculator semper certus esse poterit, respectu habito ad illam terminorum classem, qui in censum veniunt & venire possunt, post quamvis approximationem, terminos neglectos summam haud majorem quantitate data efficere, ita ut hoc nomine in methodi bonitate nihil desiderari videatur. Re autem accuratius pensata, facile deprehenditur aequationem B novas series terminorum valorem radii vectoris reapse ingredientium continere, illos autem secundum jam descriptam methodum in nulla harum correctionum unquam se se prodituros fore. Ad aequationem C prima vice integrandam addantur termini $-\frac{3.3.S\,t\,dz^2.\text{Cos.}(2z-2z')}{2B'^3ggK^4}+\frac{6t^2S\,dz^2}{2B'^3ggK^4}+\frac{4.9.S.\text{Cos.}(z-z').t\,dz^2}{8.B'^4gg.K^5}$, & emerget aequatio ddt

$$+\left(1-\frac{3S}{2B'^3ggK^4}\right)t\,dz^2+M\,dz^2-\frac{3.3.S\,t\,dz^2.\text{Cos.}(2z-2z')}{2B'^3ggK^4}$$

$$+ \frac{6 . t^2 S\, d z^2}{2\, B^{13} gg . K^4} + \frac{4 . 9 . S . \text{Cos.} (z - z') . t\, d z^2}{8 . B^{14} gg . K^5} = o = D,$$

& perſpicuum eſt, ſi jam aequatio haec D conſtrui poſſet, valorem radii vectoris vero propiorem prodire, quam per conſtructionem aequationis C, cujus loco, ut prima vice determinetur radius orbitae, aequatio D tum adhiberi poſſet. Perſpicuum autem ſimul eſt aequationem tum utique novos praebituram fore terminos, qui jam perditi per aliquam correctionem non reſtituuntur; quales autem & quinam illi ſint termini ignoratur. Ut vero hoc ratiocinium magis eluceſcat & firmetur, ſit aequationis C, quae per hactenus dicta ſit aequatio prima integrabilis ad Lunae orbitam integralis per Probl. II. inventa $t = Q + P$ Cos. $N z + D$ Cos. $(2 z - 2 z') + M$ Cos. $(2 z - 2 p z)$. Augeatur jam aequatio C termino $- \frac{3 . 3 . S\, t\, d z^2}{2\, B^{13} gg}$ Cos. $(2 z - 2 n z)$ ut fiat $d d t + N^2\, t\, d z^2 + (a + b$ Cos. $(2 z - 2 p z) + c$ Cos. $(2 z - 2 n z) + e t$ Cos. $(2 z - 2 n z))\; d z^2 = o$, ubi $\frac{3 . 3 . S}{2 B^{13} gg} = e$, & a, b, c, brevitatis ergo, pro reliquis coëfficientibus datis, & dicatur haec aequatio E. Et quoniam haec aequatio differt ab aequatione C per terminum, cujus coëfficiens datus eſt quidem exiguus, verum ſecundi ordinis parvorum, &

integratio nil aliud involvit, quam extractionem valoris unius variabilis, in functione aliqua alterius; erit quidem integralis absoluta aequatiōis E parum differens ab integrali aequationis C, eam autem differentiam superioris esse ordinis, quam secundi haud licebit assumere. Sit differentia integralium harum aequationum ex termino $e\,t.$ Cos. $(2\,z - 2\,n\,z)$ orta functio quaedam ipsius z & exponatur per $\varphi\,z$. Hoc posito erit integralis aequationis E haec sequens $t = Q + P$ Cos. $N z + D$ Cos. $(2\,z - 2\,n\,z) + M$ Cos. $(2\,z - 2\,p\,z) + \varphi\,z$, dum integralis aequationis C est $t = Q + P$ Cos. $N\,z + D$ Cos.$(2\,z - 2\,n\,z) + M$ Cos.$(2\,z - 2\,p\,z)$. Utraque harum integrālium praebet valorem ipsius t, prior tamen vero propiorem. Si jam aequatio A seu B absolute, & sub illa quam continet forma, construi posset, prodiret valor radii orbitae etiam fere absolutus; cum vero id fieri nequeat, eadem aequatio fini intento nihilominus inserviet ea ratione, ut valor ipsius t constructione aliqua inventus ad verum valorem aliquantulum accedens, in terminis aequationis B, qui involvunt functionem z substituatur, quo facto aequatio B fiet formae $d\,d\,t + N^2\,t\,d\,z^2 + M\,d\,z^2 = o$, quae proinde iterum integrata dabit valorem ipsius t adhuc magis

magis accuratum. Applicetur nunc uterque valorum ipsius t ex aequationibus C & E erutus ad aequationem B, & ex illo ab aequatione C proveniente aequatio B induet hanc formam $ddt + N^2 t dz^2 + (a + b \text{ Cos.} (2z - 2pz) + c \text{ Cos.} (2z - 2nz)) dz^2 + f(Q + P \text{ Cos.} N.z + D \text{ Cos.} (2z - 2nz) + M \text{ Cos.} (2z - 2pz))^2 dz^2 + e(Q + P \text{ Cos.} Nz + \&c.) \text{ Cos.} (2z - 2nz) dz^2 + g(Q + P \text{ Cos.} Nz + \&c.)^2 dz^2 \text{ Cos.} (2z - 2nz) + h. \text{ Cos.} (z - nz) dz^2 (R + P \text{ Cos.} Nz + \&c.)^{-4} + \frac{2\varphi dz^2}{ggv^2} \int. \frac{\pi dz}{gg} (R + P \text{ Cos } Nz + \&c.)^{-3} + \frac{\pi dv dz}{ggv^3} + \&c. = o$, relinquendo ultimum terminum sub eadem ac in aequatione B forma, & ponendo $v = R + P \text{ Cos.} Nz + \&c.$, & dicatur haec aequatio F, quae jam reducta ad formam integrabilem $ddt + N^2 t dz^2 + M dz^2 = o$, & propterea integrata praebebit valorem ipsius t propinquum, & quidem propiorem quam integratione prima. Ponendo jam in aequatione B valorem ipsius t ex aequatione E, proveniet $ddt + N^2 t dz^2 + (a + b \text{ Cos.} (2z - 2pz) + \&c.) dz^2 + f(Q + P \text{ Cos.} Nz + \&c. + \varphi z)^2 dz^2 + e \text{ Cos.} (2z - 2nz) (Q + P \text{ Cos.} Nz + \&c. + \varphi z) dz^2 + g. \text{Cos.} (2z - 2nz) (Q + P + \text{ Cos.} Nz + \&c. + \varphi z)^2$

$d z^2 + h.$ Cos. $(z - n z) d z^2 (R + P$ Cos. $N z +$ &c. $+ \varphi z)^{-4}$ + &c. $= o = G$. Posito igitur quod φz exprimat differentiam integralium aequationum C & E, deprehenditur, comparationem harum ultimarum aequationum instituendo; 1°. Utramque per substitutionem valoris t & v in functione aliqua ipsius z reductam esse in formam integrabilem: 2°. Valorem ipsius t per integrationem harum aequationum prodeuntem eo magis ad verum accedere, quo propior vero sit valor ipsius t pro ipso in aequatione B substitutus: 3°. Valorem ipsius t ex aequatione E provenientem ad verum plus appropinquare, quam illum qui oritur ab aequatione C, proindeque aequationem G valorem radii vectoris magis accuratum exhibere, quam aequationem F: 4°. Aequationem autem G continere terminos formae $f. \overline{\varphi z}]^2 d z^2$, e Cos. $(2 z - 2 n z) d z^2 . \varphi z$, & reliquos, quos ingreditur functio φz, qui termini in aequatione F deficiunt, & qui termini, utraque aequatione tum F, tum G integrata differentiam valorum t ex illis aequationibus prodeuntium producent eo magis notabilem, quo major sit functio φz, idque eo certius, cum termini functionem φz involventes in aequatione F integrata nunquam restituantur, quod inde liquet, cum

aequatio *G* integrata omnes eosdem terminos continere debeat, ac aequatio *F* integrata, plus illis terminis, qui a functione $\varphi\, z$ oriuntur: 5°. Terminos ex illa functione $\varphi\, z$ oriundos eo minus nihili esse habendos, cum in aequatione differentiali respiciendi sint ut ordinis quarti & quinti parvorum, qui fortassis simul essent ejus conditionis, ut dupla integratione peracta, antequam tempus daretur, deprimerentur per duos ordines parvorum: 6°. Id ad minimum per hanc deductionem constare, plures terminos, approximatio producatur quousque libuerit, in expressione radii vectoris orbitae defecturos fore per applicationem methodi hujus ad hoc problema solvendum, qui tamen termini valorem verum ingredi debent, & qui non minimi fortassis sunt momenti. Ex his omnibus eam ducere consequentiam ausim, ipsam methodum hactenus notam, & a clarissimis viris adhibitam solvendi problema trium corporum, ejus esse indolis, ut valor radii orbitae Lunaris describendae per eam accurate exhiberi nequeat, approximatione producta ad quosvis ordines parvorum, deficientibus scilicet terminis inferiorum ordinum, qui sollertiam & artem Analistae semper effugient. Hunc itaque defectum unam e principalibus esse causis judi-

co, cur Theoria ab obſervationibus aliquantulum adhuc differre deprehendatur. Nihilo tamen minus ſatis habebit analyſis, de quo glorietur, dum ejus ope naturae effectus, coeleſtium corporum motus, inaequalitates, turbationes, obſervationibus interdum prius, quam Theoria eas in natura eſſe debere docuerat, vix perceptae, intra paucorum numerum minutorum determinentur. Tentent autem Analyſtae integrationes aequationum differentialium $ddt + N^2 t dz^2 + M dz^2 + O t dz^2 = o$, ubi O eſt functio aliqua ipſius z, & ſi adhuc major deſideretur accuratio, aequationis $ddt + N^2 t dz^2 + M dz^2 + O t dz^2 + P t^2 dz^2 + A t^2 dz^2 = o$, in qua aequatione P eſt functio ipſius z, A vero coëfficiens datus. Quod ad me attinet, fateri haud diſſimulem, harum conſtructiones, eas, quarum ego fortaſſis potens ſum, methodos adhuc effugiſſe.

2°. Licet autem iſto, qui in momento praecedenti indicatus eſt, defectu laboret methodus allata, per Theoriam ſumma accuratione determinandi omnes Lunae turbationes, totam tamen illam Theoriae cum obſervationibus diſcrepantiam, ut ut exigua illa ſit, & verſetur intra 3. vel 4. minuta prima, illi cauſae adſcribendam eſſe haud contendo. Viam itaque calcatam

iterum eſſe calcandam duxi, eâ ſcilicet ratione, ut qua fieri potuit attentione, diſquirerem, quouſque quavis collectione terminorum ad eundem ordinem parvorum pertinentium, omnes aſſumti eſſent, atque an non continuatione approximationum ad ſuperiores ordines parvorum, collatione terminorum tum prodeuntium facta, quidam ſe ſe offerrent, qui aliquo jure retineri deberent. Ad hoc opus ſuſcipiendum, quo nomine tanta calculi copia inſigniri vere oportet, movebant me potiſſimum duae rationes ſequentes: 1°. Cum calculi hujus natura quaſi poſcat, ut quovis momento novae atque novae inſtituendae ſint approximationes, ſuſpicabar, etſi quavis approximatione ſigillatim ſpectata ad terminos perveniretur ob parvitatem utique contemnendos, approximationum tamen continuam multiplicationem producere poſſe aliquam ſummam terminorum non contemnendam: 2°. Putabam hanc rationem prorogandi calculum tum potiſſimum obtinere, ſi ipſum ad ſuperiores ordines revocando, termini ejuſdem nominis, eodem ſigno affecti deprehenderentur, qui tum collecti, ſummae fierent haud negligendae, quod quidem tum praecipue locum haberet, ſi coëfficientes numerales ſimul creſcere animadverteretur.

Tot prolixos calculos, quibuſcum teruiſſe tempus poſtmodum me poenituit, & qui, analyſi ad eum terminum ac in antecedentibus hiſce promota, praeter taedium nil fere ingenii & artis requirunt, apponere eo minus vacat, cum illis nil tam eſſentiale inveniatur, cui pars aliqua praecipua differentiae inter obſervationes & Theoriam adſcribi queat. Dum hos inibam calculos, unum alterumve theorema, & methodus particularis ſe ſe interdum obtulit, quorum unum apponere lubet. Articulo 39. pag. 50. *Theorie de la Lune* docet Dominus D' ALEMBERT invenire valorem analyticum functionis cujuſque, dum variabilis illius functionis creſcit ſive decreſcit parva quantitate. Methodus loco citato id perficiendi generalis eſt & elegans; cum vero in applicatione ad Lunae Theoriam nullae aliae hujuſmodi functiones ſe ſe offerant, quam quae a circulo dependent, ut Sinus & Coſinus &c., valores hi ſine adjumento calculi infiniteſimalis facile inveniuntur. Sit, exempli gratia, valor hujuſmodi analyticus Cos. $(Kz+\xi)$ inveniendus; & cum ſit, Cos. $(Kz+\xi) = \frac{N^{(Kz+\xi)\sqrt{-1}} + N^{-(Kz+\xi)\sqrt{-1}}}{2} = \frac{N^{\xi\sqrt{-1}}\,N^{Kz\sqrt{-1}}}{2} + \frac{N^{-\xi\sqrt{-1}}\,.N^{-Kz\sqrt{-1}}}{2}$, & ſit ſimiliter $N^{\xi\sqrt{-1}} = 1$

$-\frac{\xi}{\sqrt{-1}}-\frac{\xi^2}{2}+\frac{\xi^3}{1.2.3.\sqrt{-1}}+\frac{\xi^4}{1.2.3.4.}+$ &c., nec non

$N^{-\xi\sqrt{-1}}=1+\frac{\xi}{\sqrt{-1}}-\frac{\xi^2}{1.2}-\frac{\xi^3}{1.2.3.\sqrt{-1}}+\frac{\xi^4}{1.2.3.4.}$

$+$ &c. , erit $\frac{N^{\xi\sqrt{-1}}.N^{K\zeta\sqrt{-1}}}{2}=\frac{N^{K\zeta\sqrt{-1}}}{2}-\frac{\xi}{\sqrt{-1}}.$

$\frac{N^{K\zeta\sqrt{-1}}}{2}-\frac{\xi^2}{1.2}.\frac{N^{K\zeta\sqrt{-1}}}{2}+\frac{\xi^3}{1.2.3.\sqrt{-1}}.\frac{N^{K\zeta\sqrt{-1}}}{2}$

$+$ &c. ; & $\frac{N^{-\xi\sqrt{-1}}.N^{-K\zeta\sqrt{-1}}}{2}=\frac{N^{-K\zeta\sqrt{-1}}}{2}+$

$\frac{\xi}{\sqrt{-1}}.\frac{N^{-K\zeta\sqrt{-1}}}{2}-\frac{\xi^2}{1.2}.\frac{N^{-K\zeta\sqrt{-1}}}{2}-\frac{\xi^3}{1.2.3.\sqrt{-1}}.$

$\frac{N^{-K\zeta\sqrt{-1}}}{2}+$ &c. Colligendo hos valores invenietur

$\text{Cos.}\,(K\zeta+\xi)=\text{Cos.}\,K\zeta-\xi\,\text{Sin.}\,K\zeta-\frac{\xi^2}{2}\,\text{Cos.}\,K\zeta+$

$\frac{\xi^3}{2.3}\,\text{Sin.}\,K\zeta+\frac{\xi^4}{1.2.3.4}\,\text{Cos.}\,K\zeta-$ &c. ; modo consimili invenitur $\text{Sin.}\,(K\zeta+\xi)=\text{Sin.}\,K\zeta+\xi\,\text{Cos.}\,K\zeta$

$-\frac{\xi^2}{1.2}\,\text{Sin.}\,K\zeta+$ &c.

3°. Constructiones tabularum motus corporum coelestium indicantium duplex agnoscunt fundamentum, aut Theoriam, aut observationes, cui similiter tertium addi posset, quod tum obtinet, quando conclusiones per Theoriam erutae per observationes corrigantur.

Dum autem quaeſtio eſt de eo quid per Theoriam in cognoſcendis motibus coeleſtibus effici poterit, meo judicio integre agendum erit, contra quod fit, dum, exempli gratia, tabulae per Theoriam conſtructae, & ope obſervationum correctae, nihilominus Theoriae unice adſcribuntur. Notum eſt tabulas Domini MAJERI, ex omnibus hucuſque editis, obſervationibus optime reſpondere, & nomen beati viri, qui tum illo opere, tum aliis praeclaris Aſtronomiam ditaverat inventis, apud ſubſequentes Aſtronomos ſemper celebre erit. Verum dubitare adhuc mihi liceat de earumdem tabularum conſtructione ope ſolius Theoriae, ſicut & eouſque dubitem aliquem, problema hoc aggrediendo per determinationem orbitae deſcribendae directam ope analyſeos ſecundum principia in hiſce poſita illud abſoluturum fore, donec impedimenta in obſervatione prima hujus paragraphi indicata removere ſciat. Hoc autem ipſo haud negaverim varias eſſe rationes Theoriam aliquam perficiendi novis correctionibus, & aſſiduis obſervationibus; non autem eo ipſo conſtat, quid per Theoriam abſolute, & problema via directa in toto ſuo complexu tractando effici poterit.

4°. Haud itaque minori cum ſucceſſu crediderim

viam determinandi inaequalitates corporum coeleſtium, quae per continuas procedit correctiones, adhiberi poſſe, cujus methodi mentionem feci in initio paragraphi 3., proponi autem analytice poterit methodus aliqua hujus indolis modo ſequenti. Si fuerint vires φ & π reductae ut prius, & negligendo vim π ut exiguam, habetur aequatio ad orbitam ſola vi φ deſcribendam haec $d\,d\,v + v\,d\,z^2 - \frac{\varphi\,d\,z^2}{v^2 g\,g} = o$. Eritque temporis aequatio $d\,t = \frac{x^2 d\,z}{g\,g} = \frac{d\,z}{v^2 g\,g}$, & ope harum duarum aequationum invenietur angulus dato tempore deſcribendus ex ſola vi φ. Si jam vis π conſideretur, illa quatenus eſt normalis ad radium vectorem, in convolvenda figura per vim φ deſcribenda circa centrum virium, ad quod tendunt vires φ, tota conſumitur. Inventa itaque ſumma angulorum $o\,D\,H$ pro aliquo tempore dato, quae dicatur q, habebitur locus corporis. Erit vero $o\,D\,H = d\,d\,q = \frac{\pi\,d\,z}{v^3 g\,g}$; ergo ſi per aequationem priorem ſit $v = \varphi\,z$, ubi $\varphi\,z$ eſt illa ipſius z functio, quae prodiret per ejus aequationis integrationem, invenietur $q = \int. d\,z \int. \frac{\pi\,d\,z}{\varphi\,z]^3 g\,g}$, quae aequatio, cum arcus circuli eam ingrediatur, indicat

angulum q continuo crescere. Hanc analysin ulterius & ita prosequi, ut ejus aliquod specimen praecipuum exhibere queam, variae occupationes hucusque vetuerunt. Crediderim tamen hanc rationem proponendi problema trium corporum haud infeliciter applicari posse similiter ad turbationes Cometarum a Planetis inveniendas, dum illi in suo accessu & recessu a Sole versantur in horum viciniis, tum propterea, quod vires turbatrices Planetarum, dum Cometa est in perihelio, ut evanescentes haberi queant, & ob id orbita per observationes talis determinari, qualis esset si omnes vires turbantes abessent, tum etiam propterea, quod in Theoria Cometarum sufficiat pro quavis revolutione invenisse illas turbationes calculo repetito.

§. VIII.

Hactenus in analysi sola, & ejus examine brevi instituendo occupatus, pauca addam de formularum analyticarum usu in tabulis construendis, qui in eo potissimum consistit, ut determinentur, ea qua fieri poterit exactitudine, coëfficientes dati, qui per observationes cognosci debent. Ad reliqua elementa observationibus noscenda, ut inclinationem orbitae mediam, medium nodorum motum &c.: quae coëfficientes

datos ingrediuntur, quod attinet, obſervationes ſelectae, & bonae ad ea determinanda inſervient; excentricitas autem orbitae Lunaris, quae eſt coëfficiens termini Cos. $N z$ in aequatione ad orbitam, non ſatis exacte adhuc deprehenſa eſſe mihi videtur. Quando ad ipſam methodum ſolvendi problema, & ad aequationem differentialem orbitam mobilis indicantem, ſcilicet $ddv + v dz^2 - \frac{\varphi dz^2}{v^2 gg} - \frac{\varphi dz^2}{v^2 gg} \int . \frac{\pi dz}{v^3 gg} +$ &c. attenditur, ſatis liquet orbitam Lunae conſiderari debere, ut ellipſin perfectam circa centrum Telluris tanquam figurae focum deſcriptam, ſed a viribus Solis turbatam, quae figura elliptica exprimitur aequatione a tribus primis aequationis terminis ſcilicet $ddv + v dz^2 - \frac{\varphi dz^2}{v^2 gg} = o$, in qua aequatione tum $\varphi = v^2$, conſtante, indicantibus reliquis terminis inaequalitates a Solis actione oriundas. Aequationem vero integralem ad illam perfectam ellipſin, quam, remota Solis actione, Luna circa Terram deſcriberet, terminus formae P Cos. z ingreditur, qui in aequatione ad orbitam Lunae veram fit formae P Cos. $N z$, quo indicatur apſides figurae motu quodam affici, & qui terminus, quoad coëfficientem P, nullam ſubit

mutationem per vires Solis turbantes. Dum itaque verus pro P, valor erit ſubſtituendus, excentricitas ellipſeos primitivae, ut ita dicam, ſeu ellipſeos deſcribendae, ſi Sol abeſſet, erit invenienda. Ad hunc valorem ipſi P tribuendum, & qui per aequationem ad orbitam exigitur, oportet illam orbitam, quam Luna ab omni Solis actione libera deſcriberet, determinari. Cum autem haud demonſtrari poterit excentricitatem mediam inter maximam & minimam, ſupputandam ab aequatione centri orbitae Lunaris maximae, & minimae, huic jam deſcriptae aequivalere, gratis mihi videtur hoc medium aſſumi tanquam id, quod pro P in aequatione ad orbitam Lunae veram erit ſubſtituendum. Iſtae obſervationes, quarum ope, methodo aliqua directa haec determinari poterit orbita, & proinde vera excentricitas, vix indicari poterunt, cum Luna per Solis actionem ab illa orbita perpetuo retrahatur. Operae autem pretium fortaſſis erit modo ſequenti in hac re diſcutienda procedere. Calculo analytico pro motu Lunae inveniendo, omni qua fieri poterit accuratione ad tot terminos, quot requiri ab ipſa terminorum prodeuntium indole intelligi poterit, promoto, quaeratur angulus a Luna deſcribendus tem-

pore dato in anomalia media, ut ſcilicet ſit $z = Z + A$ Sin. $a Z + B$ Sin. $b Z + C$ Sin. $c Z +$ &c : deſignante Z anomaliam mediam. Horum terminorum coëfficientes datos ingredientur elementa data, ut excentricitas P, inclinatio μ, excentricitas orbitae telluris λ, &c., eoſque una cum factoribus numeralibus conſtituent. Datis hiſce ultimis elementis per obſervationes ad id idoneas, remanebit P adhuc incognita hos ingrediens coëfficientes. Obſervationibus igitur inveniatur ang. z dato tempore deſcriptus, qui ſit $n^{\circ}\, l'\, m''$, & habebitur aequatio $n^{\circ}\, l'\, m'' = Z + A$ Sin. $a\, Z +$ &c.. Ex tempore autem dato indagantur Sin. $a\, Z$, Sin. $b\, Z$, &c.: unde calculo algebraico innoteſcet P. Ipſa hujus proceſſus natura indicat valorem ipſius P fore eum quem obtineret, ſi Luna ab actione Solis libera ſuam circa Tellurem ellipſin deſcriberet, cum ſcilicet P per ipſam illam aequationem determinetur, in qua P valorem excentricitatis ellipſeos exactae circa Tellurem deſcribendae habere debet. Obſervationum momenta ejuſmodi, in quibus plures inaequalitates evaneſcant, ut huic fini apprime idonea, eligi poterunt. Quod ſi res ſuccedat, veruſque valor inventus hac ratione fuerit, idque per obſervationes tabularum convenientiam cum

obſervationibus comprobantes conſtet, indicium erit analyſin ita fuiſſe inſtitutam, & approximationem ea cautela eſſe peractam, ut termini aut rejecti, aut ita comparati ac obſervat. I. paragraphi antecedentis indicat, proindeque analyſin ſemper effugientes, jure negligi queant. Sin minus, aliae tententur viae ad hanc Theoriam perficiendam. Interea valde dubitem quemquam analyſin hanc ultra id, quod factum eſt, promoturum fore. Dum autem haec auguror, tantummodo eſt ſermo de via illa analytica, quam in hiſce antecedentibus mea propoſui methodo, & quam eandem viri meo judicio omnino majores, Domini ſcilicet D' Alembert, Euler, Clairaut, Simpson, quiſque ſua methodo particulari ſequi & amplecti amarunt. Novum autem quid hoc in negotio praeſtitiſſe illum non exiſtimaverim, qui approximationes ſecundum haec principia inſtituendas labore incredibili ad plures ordines parvorum evehat, eoque pacto fortaſſis unum, vel alterum invenerit terminum addendum. Neque dum quaeſtio eſt de eo, quid per Theoriam in motibus coeleſtium corporum, eorumque turbationibus inveniendis effici poterit; illum omnem moviſſe lapidem ſentio, qui Theoriam quamvis aſſiduis obſervationibus ita cor-

rectam dederit, ut tabulas licet admodum exactas duplici ista compilaverit via. Dissertatiuncula hac in finem vergente, hanc subjungere mihi liceat animadversionem: vereor scilicet, ne arti analyticae & calculo, quibus sua laus & gloria semper utique constabit, quae tamen ut subsidia, deficiente Geometriâ, spectari debent, in hujusmodi quaestionibus, quales sunt determinationes motuum coelestium, resolvendis, nostro aevo plus justo indulgeatur, dum viam analyticam esse solam ad conclusiones cum natura convenientes hoc in negotio perveniendi quasi ratum statumque sit. Subsidia illa quae suggerit Geometria, quorumque ope Magnus NEWTONUS tam firma etiam in hujusmodi argumentis tractandis posuerit fundamenta, & quibus in debitum revocatis usum, analysta ille Geometricus, qui eadem scienter adhibere noverit, quovis gressu, quid actum sit, quid deficiat noscet, aliquoties fortassis huic Theoriae haud minorem addent lucem, quam analysis & calculus. Haec fuerunt pauca illa, quae hac occasione circa Lunae Theoriam monenda mihi in mentem venerunt.

Quam scit uterque, libens censebo, exerceat artem.
Horatius.

PAULLI FRISII

DE

SUPPUTANDIS

MOTUUM LUNARIUM

AEQUATIONIBUS

COMMENTARIUS.

DANIELI MELANDRO
PAULLUS FRISIUS
S. P. D.

Litteras tuas humanissimas, die 5. Julii ad me datas, non nisi post reditum ex Germaniâ ineunte mense Novembri accepi; ac primo mihi gavisus sum, quod quae ad Clariss. Fernerum de tuis in librum Quadraturarum Newtoni explicationibus ac commentariis amice, ut sentiebam, scripseram, nova mihi obtinuerint ingenii tui monumenta. Deinde vero specimen tuum pro supputandis Lunae inaequalitatibus summa cum voluptate animi perlegi, & gratissimum mihi accidit ex te ipso intelligere quid sentias de arduis hisce problematis, quae cum Geometricis approximationibus a Newtono primum tentata, & ad aequationes, ac tabulas observationibus optime congruentes deducta sint, ante annos fere vigintiquinque recognita, & omnibus analy-

ſeos ſubſidiis generatim in omnes partes verſata, ſex jam aut ſeptem primi ordinis Mathematicos exercuerunt. Denique ſpecimen omne Parmam tranſmiſi ad D.num DE KERALIO, hominem Mathematicis ſtudiis, & ea laude inprimis clarum, quod feliciſſimo ingenio Regii Adoleſcentis, & naturalibus animi dotibus explicandis praefectus, liberaliſſima inſtitutione cultorem optimum litteris, bonis artibus Patronum munificentiſſimum, & Parmenſi Ditioni Principem clementiſſimum, ac magnanimum praeparaverit. Tuam ipſe diſſertationem illico, ut vides, in lucem publicam edi voluit. Haec de rei totius exitu. Ut de re ipſâ adjiciam nonnulla, initio diſſertationis, pro inquirenda differentiali aequatione, mihi viſus es ad methodum CLAIRAUTII, deinde vero in progreſſu pro integralibus accipiendis ad ALEMBERTII methodum propius accedere, ac novo quodam aſpectu utramque ſic propoſuiſse, ut ictu oculi tota problematis difficillimi analyſis poſſit conſpici. Quae interſeruiſti ad puram algebram pertinentia ſummum, ut es, algebriſtam ſapiunt. In applicanda autem

analysi, & algebricis aequationibus ad numeros traducendis, quae sit praecipua totius calculi difficultas paragrapho septimo optime indicasti: calculum scilicet omnem quibusdam approximationibus complecti: approximationum exordium sumi ab hypotesi orbitae proxime circularis, novisque integrationibus novas orbitae correctiones addi: & in singulis integrationibus plures terminos semper negligi, qui per nullam deinde integrationem, aut correctionem restituuntur, quique cujus sint ordinis non plane constat. Quod si addas plures in differentialibus aequationibus esse terminos cosinubus angulorum quorumdam affectos, qui aut in prima aut in secunda integratione repetitis divisionibus augentur, & exempla quaeras ex iis aequationibus quae habent pro argumento aut duplam Solis distantiam ab apogaeo, aut duplam distantiam Lunae a Sole dempta anomalia Lunae, conficies profecto in approximationibus problematis trium corporum summum adhuc analyseos rigorem, perfectionemque desiderari. Ad calcem denique totius speciminis optime a te adnotatum est speciem il-

lam Geometrici calculi qua Newtonus potiſſimum uſus eſt, plura ſubſidia ad approximationes contrahendas ſuppeditare.

Opus meum de univerſali corporum gravitate, miſsum jam Vindobona ad FERNERUM & WARGENTINUM, te modo evolviſse ſpero, & plura compendia hujuſmodi examinaſse, ut quae variationem Lunae, quae aequationes annuas, quae apogaei, & nodorum motum, atque inde ortas aequationes alias reſpiciunt. Spero etiam brevi accipere quid tibi de theoria Lunae ſingillatim, atque univerſim de toto opere viſum fuerit: ex WARGENTINO autem potiſſimum audire vellem quid ſentiat de theoremate illo ellipſeos revolutae ac tranſpoſitae, quod cum in Luna tantum quam proxime verum ſit, in orbitis Satellitum Jovialium, ob parvitatem excentricitatis, eſt fere accurate verum, quodque cum a Luna ad Satellites ipſos traduxiſſem, breviſſimo calculo aequationes illas collegi, quibus WARGENTINUS eximiam Aſtronomiae acceſſionem fecit, & quae empiricae dictae ſunt cum primum obſervationum ope innotuerunt. Ego poſt operis editionem exiguas

omnes Lunae aequationes, illamque inprimis recognovi, quae habet pro argumento ſimplicem diſtantiam Lunae a Sole, quaeque cum in Propos. VIII. Lib. III. unius integrationis ope uno fere ac dimidio minuto minor prodierit quam ferant Majeri tabulae, duplici poſtmodum integratione ad eaſdem tabulas proxime deducta eſt. Accidit autem quod cum citatae propoſitionis methodum latius evolverem, animadverti & generalem eſſe methodum, & ad theoriam omnem non ſolum Lunae, ſed aliorum etiam Satellitum, Jovisque inſuper ac Saturni, & Planetarum omnium breviſſime traduci poſse. Quae inveni hactenus tibi exſcribam, ut videas me quandoque itineribus, aliiſque curis diſtractum, non omnino tamen a ſtudiis his jucundiſſimis feriare. Quae vero deinceps addere contigerit, niſi illico in lucem prodeant, tibi per litteras communicabo. Haec modo habe amicitiae & honoris cauſsa. Obſequium meum Academiae noſtrae Holmienſi teſtatum facies. Inprimis autem FERNERUM & WARGENTINUM meo nomine ſaluta. Vale.

Dabam Mediolani die 1. Februarii anni 1769.

PAULLI FRISII
DE
SUPPUTANDIS
MOTUUM LUNARIUM
AEQUATIONIBUS
COMMENTARIUS.

I.

QUONIAM, ſublatis viribus perturbatricibus, Luna vi ſuae gravitatis ellipſim circa Terram veluti circa focum deſcriberet, ſi major ipſius ellipſeos ſemiaxis, ſive mediocris Lunae diſtantia a Terra exprimatur unitate, & excentricitas vocetur φ, anomalia vera z, media autem Z; erit radius vector quicumque $b = \frac{1-\varphi^2}{1-\varphi \text{Cos.} z} = 1 - \frac{1}{2}\varphi^2 + \varphi \text{ Cos.} z + \frac{1}{2}\varphi^2 \text{Cos.} 2z$ &c., eritque anomalia vera $z = Z - \left(2\varphi - \frac{1}{4}\varphi^3\right)$ Sin. $Z + \frac{5}{4}\varphi^2$. Sin. $2Z - \frac{13}{12}\varphi^3$. Sin. $3Z$, & ſi ſit $\varphi = 0,05505$, erunt aequationes priores medii motus Lunae, $- 6^\circ\, 18'\, 22''$. Sin. $Z + 13'$. Sin. $2Z - 37''$. Sin. $3Z$: quae duo ſatis nota Theoremata ſingulari methodo expoſui Cap. IX. Lib. I. *De Gravitate*.

I

II.

Quia vero per Coroll. I. Prop. XXXVII. Lib. ejusdem I. gravitas Lunae in summa apside ellipseos esset ad vim centrifugam, ut distantia apogaea ad dimidium latus rectum principale, sive ut $1+\varphi : 1-\varphi^2 = 1 : 1-\varphi$, & vis centrifuga variari debet in triplicata ratione distantiae a foco reciproce; si gravitas in mediocri distantia exponatur similiter unitate, & ad distantiam quamcumque b sit $\frac{1}{b^2}$, erit vis centrifuga in summa apside $\frac{1-\varphi}{(1+\varphi)^2}$, & ad distantiam b erit $\frac{1-\varphi^2}{b^3}$, ac vis utriusque differentia erit $\frac{1-\varphi^2-b}{b^3}$, & si actione virium quarumlibet perturbatricium ita abducatur Luna a perimetro ellipseos, ut radius vector b evadat $b+t$, & sit quantitas t satis parva, fiet differentia duarum virium $\frac{1-\varphi^2-b-t}{b^3+3b^2t} = \frac{1-\varphi^2-b}{b^3} + \frac{2t}{b^3} - \frac{3t(1-\varphi^2)}{b^4}$: unde priorem differentiam subtrahendo, erit $\frac{2t}{b^3} - \frac{3t(1-\varphi^2)}{b^4}$ vis omnis, quae viribus illis perturbatricibus obnitetur, atque impediet ne Luna a perimetro ellipseos recedat longius, & in orbita circulari vis hujus modi erit $-t$, recessui scilicet ab ipsa orbita proportionalis.

III.

Quod si insuper mediocres Lunae a Terra, & Terrae a Sole sint inter se ut $1 : a$, & sit $1 : N$ ratio revolutionis Lunae periodicae ad synodicam, & $1 : n$ sit ratio periodicorum temporum Terrae circa Solem, & Lunae circa Terram, adeoque sit $1 - n : 1 = 1 : N$, & si motus Lunae ab apogaeo supputatus vocetur z, motus Solis ab eodem puncto sit $n z$, & Lunae a Sole distantia $z - n z$; per Propos. I. Lib. III. erit vis perturbatrix Solis juxta vectorem radium Lunaris orbitae exercita $= \frac{1}{2} b n^2 + \frac{3}{2} b n^2 . \text{Cos.} \, (2 z - 2 n z) + \frac{9 n^2}{8 a} . \text{Cos.} \, (z - n z)$, & vis omnis centripeta Lunae in Terram $= \frac{1}{b^2} - \frac{1}{2} b n^2 - \frac{3}{2} b n^2 . \text{Cos.} \, (2 z - 2 n z) - \frac{9 n^2}{8 a} . \text{Cos.} \, (z - n z)$, & vis perturbatrix radio eidem vectori perpendicularis erit $= \frac{3}{2} b n^2 . \text{Sin.} \, (2 z - 2 n z) + \frac{3 n^2}{8 a} . \text{Sin.} \, (z - n z)$.

IV.

Et quia insuper velocitas in elementum suum ducta aequatur vi acceleratrici ductae in elementum spatii, & elementum spatii perpendiculariter ad vectorem radium in orbita elliptica percursi est $b \, d z$, si velocitas

perpendicularis radio ipsi vocetur V, erit $V\,dV = -\frac{3}{2} b^2 n^2 d\zeta$. Sin $(2\zeta - 2n\zeta) - \frac{3n^2}{8a} d\zeta$. Sin. $(\zeta - n\zeta)$: & pro b^2 scribendo $1 + 2\varphi$. Cos. $\zeta + \frac{3}{2}\varphi^2$. Cos. 2ζ, ut, cum productum Sinus, & Cosinus duorum arcuum aequetur dimidio Sinui totius summae addito dimidio Sinu differentiae arcuum eorumdem, prior terminus $-\frac{3}{2} b^2 n^2$. Sin. $(2\zeta - 2n\zeta)$ evadat $-\frac{3}{2} n^2$. Sin. $(2\zeta - 2n\zeta) - \frac{3}{2} n^2 \varphi$. Sin. $(2\zeta - 2n\zeta \pm \zeta) + \frac{9}{8} n^2 \varphi^2$. Sin. $2n\zeta$; integrando de more, & pro $\frac{1}{1-n}$ scribendo N, atque ita addendo constantem ut in quadraturis, posito Cos. $(2\zeta - 2n\zeta) = -1$, velocitas omnis ex viribus perturbatricibus orta evanescat, quia summa omnium Sinuum aequatur Sinui verso per coëfficientem constantem variabilis anguli diviso, fiet $V^2 = \frac{1-\varphi^2}{b^2} + \frac{3}{2} n^2 N + \frac{3}{2} n^2 N$. Cos. $(2\zeta - 2n\zeta) + 3 n^2 \varphi . \frac{\text{Cos.}(2\zeta - 2n\zeta \pm 1)}{2 - 2n \pm 1} - \frac{9}{8} n \varphi^2$. Cos. $2n\zeta + \frac{3n^2 N}{4a}$. Cos. $(\zeta - n\zeta)$.

V.

Quia denique vis centrifuga aequatur quadrato velocitatis radio vectori perpendicularis diviso per eundem radium, erit incrementum vis centrifugae ortum

ex viribus perturbatricibus $\frac{3n^2N}{b} + \frac{3n^2N}{2b}$. Cos. $(2\zeta - 2n\zeta) + \frac{3n^2\varphi}{b} \cdot \frac{\text{Cos.}(2\zeta - 2n\zeta \pm \zeta)}{2 - 2n \pm 1} - \frac{9}{8} n\varphi^2$.Cos. $2n\zeta + \frac{3n^2N}{4a}$. Cos. $(\zeta - n\zeta)$, atque addendo vim aliam perturbatricem, quae juxta vectorem radium dirigitur, per §. II., & III., erit vis omnis acceleratrix, qua Luna ſpatio t retrahetur a perimetro ellipſeos, & qua ellipticus motus turbabitur, $= \frac{2t}{b^3} - \frac{3t.(1-\varphi^2)}{b^4} + \frac{3n^2N}{2b} + \frac{1}{2} bn^2 + \frac{3}{2} n^2 \left(\frac{N}{b} + b\right)$ Cos. $(2\zeta - 2n\zeta) + \frac{3n^2\varphi}{b} \cdot \frac{\text{Cos.}(2\zeta - 2n\zeta \pm \zeta)}{2 - 2n \pm 1} - \frac{9n\varphi^2}{8}$. Cos. $2n\zeta + \frac{3n^2}{4a}\left(N + \frac{3}{2}\right)$ Cos. $(\zeta - n\zeta)$.

VI.

Jam vero ſi ſit aequatio differentialis ſecundi gradus $ddt + A^2 t d\zeta^2 = B d\zeta^2$. Cos. $C\zeta$, erit $\frac{t}{\text{Cos.}A\zeta} = E + \frac{D.\text{Sin.}A\zeta}{\text{Cos.}A\zeta} + \frac{B\,\text{Cos.}\,C\zeta}{(A^2 - C^2)\,\text{Cos.}A\zeta}$ ſumendo enim differentiale hujus quantitatis, erit $\frac{dt.\,\text{Cos.}\,A\zeta + A t d\zeta.\,\text{Sin.}\,A\zeta}{(\text{Cos.}\,A\zeta)^2} = \frac{AD.d\zeta}{(\text{Cos.}\,A\zeta)^2} - \frac{B.d\zeta}{A^2 - C^2} \cdot \frac{C.\text{Sin.}C\zeta.\text{Cos.}A\zeta - A.\text{Cos.}C\zeta.\text{Sin.}A\zeta}{\text{Cos.}\,A\zeta}$

& cum ſit $- C$. Sin. $C\zeta$. Cos. $A\zeta + A$. Cos. $C\zeta$. Sin.

$A z = \frac{1}{2} (A - C). \text{Sin.} (A z + C z) + \frac{1}{2} (A + C).$ $\text{Sin.} (A z - C z)$, erit insuper $d t. \text{Cos.} A z + A t d z.$ $\text{Sin.} A z = A D . d z + \frac{1}{2} B d z. \frac{\text{Sin.} (A z + C z)}{A + C} +$ $\frac{1}{2} B d z. \frac{\text{Sin.} (A z - C z)}{A - C}$, ac posito $d z$ constanti erit $d d t. \text{Cos.} A z + A^2 t d z^2. \text{Cos.} A z = \frac{1}{2} B d z^2. \text{Cos.}$ $(A z + C z) + \frac{1}{2} B d z^2. \text{Cos.} (A z - C z) = B d z^2.$ $\text{Cos.} A z . \text{Cos.} C z$.

VII.

Bini priores termini in aequatione $t = E . \text{Cos.} A z$ $+ D . \text{Sin.} A z + \frac{B. \text{Cos.} C z}{A^2 - C^2}$ iidem sunt qui in ellipsi; nam si anomalia non supputetur a summa apside, sed a puncto, quod inde distet angulo m, loco $\varphi . \text{Cos.} z$ habebimus $\varphi . \text{Cos.} (z - m) = \varphi . \text{Cos.} m . \text{Cos.} z + \varphi.$ $\text{Sin.} m . \text{Sin.} z$. Tertius autem terminus $\frac{B . \text{Cos.} z}{A^2 - C^2}$ indicabit recessum ab ipsa orbita elliptica. Quod si vero anomalia supputetur ab eo puncto, in quo est $z = o$, & in priori integratione aequationis constans nulla addi debeat, fiet $t = E . \text{Cos.} A z + \frac{B. \text{Cos.} C z}{A^2 - C^2}$: & si insuper posito $z = o$ debeat esse $t = o$, fiet $E = -$ $\frac{B}{A^2 - C^2}$. Quare etiam si ponatur $A = C$, &, ob quan-

titatem $\frac{B}{A^2 - C^2}$ infinitam, debeat aequatio circulares aliquos arcus involvere, qui magis ſemper magiſque augeantur, ipſa conſtantis additione evaneſcent circulares arcus, & evaneſcet ſimul praecipua horum problematum difficultas.

VIII.

Datis hiſce omnibus, ſi exordiamur a vi $- t + \frac{3n^2}{4a}\left(N + \frac{3}{2}\right) . \text{Cos.}(z - nz)$, inquiramuſque exiguam omnem aberrationem ab orbita elliptica, ac proxime circulari, quae a vi ipſa oriri debet, habebimus $ddt = - t dz^2 + \frac{3n^2}{4a}\left(N + \frac{3}{2}\right) \text{Cos.}(z - nz). dz^2$. Notum eſt enim quod ſi vis acceleratrix vocetur P, dt elementum ſpatii, & conſtans elementum temporis dz, ac ſit velocitas $\frac{dt}{dz}$, acceptis differentialibus erit $\frac{ddt}{dz} = P dz$. Itaque integrando fiet $t = \frac{3n^2}{4a} . \left(N + \frac{3}{2}\right) . \frac{\text{Cos.}(z - nz)}{1 - (1 - n)^2} = \frac{3n}{8a} . \left(N + \frac{3}{2}\right) . \text{Cos.}(z - nz)$. Quia vero data velocitate projectionis, ob aequales areas aequalibus temporibus deſcriptas, angulares motus ſunt inter ſe reciproce ut quadrata radiorum, & velocitate aucta vel imminuta an-

gulares motus ſunt ut velocitates directe, & quadrata radiorum reciproce, dum radius b fiet $b+t$, & velocitas projectionis augebitur quantitate $\frac{3}{8}n^2 N$. Cos. $(z-nz)$, angularis motus dz variabitur in ratione $b^2+2bt:b^2+\frac{3n^2}{8a}.N$. Cos. $(z-nz)$, ſive in ratione $1:1-2t+\frac{3n^2}{8a}.N$. Cos. $(z-nz)=1:$ $1-\frac{3n}{4a}.\left(N+\frac{3}{2}-\frac{1}{2}Nn\right)$. Cos. $(z-nz)$: ac rurſus integrando erit medii motus aequatio $-\frac{3nN}{8a}.$ $(2N+3-Nn)$. Sin. $(z-nz)$. Quod ſi igitur parallaxis mediocris Solis ſit $9''$, Lunae autem $57'18''$, & ſit propterea $1:a=9:3438$, ſitque inſuper $1:N=1:1,080853$, & $1:n=365^d\,6^h\,9':27^d\,7^h\,43'=13,3688:1$, fiet $\frac{3nN}{8a}.(2N+3-Nn)=0,0405$, & cum radius aequetur arcui $57,29578°$, ſive $206264,808''$, erit aequatio omnis hujus modi $-1'24''$. Sin. $(z-nz)$, eademque evaderet $-1'38''$. Sin. $(z-nz)$, ſi parallaxis Solis eſſet $10\frac{1''}{2}$.

IX.

Eadem methodo inveniri poterunt inaequalitates illae aliorum Satellitum ac Planetarum, quae propor-

tionales sunt Sinui distantiae simplicis unius ab alio. Nam si 1 : a sit ratio distantiarum Planetae inferioris, superiorisque a Sole, n: 1 ratio periodicorum temporum, 1 : N ratio differentiae motuum angularium ad inferioris Planetae motum, 1 : M ratio massarum superioris Planetae, & Solis; per Propos. XXXI., & XXXII. Lib. III. *De Gravitate*, erit vis perturbatrix $\frac{3}{8Ma^4} \cdot \left(2N + 3 + 5 \cdot \frac{2N+5}{8a^2}\right) \cdot \text{Cos.}(z - nz)$. Erit itaque differentia vectoris radii $\frac{3}{8Ma^4}\left(2N + 3 + 5 \cdot \frac{2N+5}{8a^2}\right) \cdot \frac{\text{Cos.}(z-nz)}{2n-n^2}$, & motus medii variatio erit $-\frac{3N}{4Ma^4}\left(2N+3+5 \cdot \frac{2N+5}{8a^2}\right) \cdot \frac{\text{Sin.}(z-nz)}{2n-n^2} + \frac{3N^2}{8a^4}\left(1 + \frac{5}{8a^2}\right) \text{Sin.}(z - nz)$. Haec formula si iisdem numeris Cap. VII. Lib. III. subductis ad Planetas omnes inferiores traducatur, priorem quidem aequationem medii motus Jovis actione Saturni genitam praebebit fere $-1 \frac{5'}{6}$. Sin. $(z - nz)$, ut in eodem capite invenimus, & proxime ut ferunt MAJERI Tabulae: maximam vero aequationem medii motus Martis ex Jove ortam praebebit $-21''$, Terrae ex Jove $-7''$, primi Jovis Satellitis ex secundo, & secundi

K

etiam ex tertio $-\frac{3,206265''}{M}$, quae tria ad numeros Cl. Clairaut, Bailly, & la Lande propius quam antea accedent.

X.

Ut vero ad Lunam redeamus, ſi manentibus omnibus quae antea inveniendae ſint aberrationes ab orbita elliptica, variationeſque medii motus, quae viribus $\frac{2t}{b^3} - \frac{3t}{b^4} + \frac{3}{2}n^2 . \left(\frac{N}{b} + b\right) . \text{Cos.} \left(2z - 2nz\right) + \frac{3n^2\varphi}{b} . \frac{\text{Cos.}\left(2z - 2nz \pm 1\right)}{2 - 2n \pm 1}$ gigni poſſunt, & minorum etiam quantitatum ratio ſit habenda; pro quadrato elementi temporis dz^2 ſcribere oportebit $b^4\ dz^2$. Nam ſi in mediocri diſtantia gravitas unitate exprimatur, eademque ſit expreſſio velocitatis, quae cadendo per dimidium radium acquiri poſſet, quaeque in circulari orbita ad diſtantiam mediam deſcripta eſſet velocitas projectionis; quia tempus periodicum in ellipſi aequatur periodico tempori in circulo ad diſtantiam mediam deſcripto, totum tempus periodicum in ellipſi exprimeretur peripheria ipſius circuli, eritque ad tempus quo deſcribetur angulus dz, ut tota area ellipſeos ad ſectorem quam minimum, ſive ut productum periphe-

riae in dimidium radium ad $\frac{1}{2} b^2 dz$, eritque idcirco $b^4 dz^2$ quadratum temporis, quo in ellipsi describetur angulus dz. Hanc igitur quantitatem ducendo in expressionem vis acceleratricis, ob $b^3 = 1 + 3 \varphi . \text{Cos.} z$, & $b^5 = 1 + 5 \varphi . \text{Cos.} z$, fiet $\frac{3}{2} n^2 (N b^3 + b^5) . \text{Cos.} (2z - 2nz) = \frac{3}{2} n^2 (N + 1) . \text{Cos.} (2z - 2nz) + \frac{3}{4} n^2 \varphi . (3N + 5) . \text{Cos.} (2z - 2nz \pm z)$, neglectisque productis differentiae t in quantitates alias inferiorum ordinum, erit $ddt + t dz^2 = \frac{3}{2} n^2 (N + 1) dz^2 . \text{Cos.} (2z - 2nz) + 3 n^2 \varphi . \left(\frac{3n + 5}{4} + \frac{1}{1 - 2n}\right) dz^2 . \text{Cos.} (z - 2nz) + 3 n^2 \varphi . \left(\frac{3N + 5}{4} + \frac{1}{3 - 2n}\right) dz^2 . \text{Cos.} (3z - 2nz)$.

XI.

Integrando igitur juxta §. VI. prodibit aberratio omnis t ab orbita elliptica $= - \frac{3}{2} n^2 \frac{(N + 1) . \text{Cos.}(2z - 2nz)}{3 - 8n} + \frac{3}{4} n \varphi . \left(\frac{3N + 5}{4} + \frac{1}{1 - 2n}\right) . \text{Cos.} (z - 2nz) - 3 n^2 \varphi . \left(\frac{3N + 5}{4} + \frac{1}{3 - 2n}\right) . \frac{\text{Cos.} (3z - 2nz)}{8 - 12n}$, & juxta §. IV., & VIII. motus medius minuetur in ratio-

ne $1:1 + \frac{3n^2(N+1).\,\text{Cos.}(2\zeta - 2n\zeta)}{3-8n} - \frac{3}{2}n\varphi.$ $\left(\frac{3N+5}{4} + \frac{1}{1-2n}\right).\ \text{Cos.}\ (\zeta - 2n\zeta) + 3n^2\varphi.$ $\left(\frac{3N+5}{4} + \frac{1}{3-2n}\right).\frac{\text{Cos.}(3\zeta - 2n\zeta)}{4-6n} + \frac{3}{4}n^2N.$ $\text{Cos.}(2\zeta - 2n\zeta) + \frac{3}{2}n^2\varphi.\ \frac{\text{Cos.}(\zeta - 2n\zeta)}{1-2n} + \frac{3}{2}$ $n^2\varphi.\ \frac{\text{Cos.}(3\zeta - 2n\zeta)}{3-2n}$, ac rurſus integrando habebuntur novae aequationes medii motus $\frac{3}{2}n^2N\left(\frac{N+1}{3-8n}\right.$ $\left.+\frac{1}{4}N\right).\ \text{Sin.}(2\zeta - 2n\zeta) - \frac{3}{2}n\varphi.\left(\frac{3N+5}{4} + \frac{1-n}{1-2n}\right).$ $\frac{\text{Sin.}(\zeta - 2n\zeta)}{1-2n} + \frac{2}{5}n^2\varphi.\ \text{Sin.}(3\zeta - 2n\zeta)$, iiſdemque numeris ſubſtitutis qui in §. VIII., evadent aequationes ipſae $37'.\ \text{Sin.}(2\zeta - 2n\zeta) - 1^\circ\, 20'\, 50''.\ \text{Sin.}$ $(\zeta - 2n\zeta) + 25''.\ \text{Sin.}(3\zeta - 2n\zeta)$.

XII.

Sic vero inventa priori correctione medii motus Lunae, & vectoris radii, ad coëfficientes ſingulos accuratius determinandos reaſſumi poterunt priores omnes aequationes, & calculus omnis perduci ad inferiores terminos quantum libuerit. Primo ſcilicet in loco quadrati t^2, & productorum omnium differentiae t,

Sinusque, aut Cosinus anomaliae, valorem vero proximum substituendo, corrigenda erit expressio totius vis, quae juxta vectorem radium dirigitur. Deinde quia vis perturbatrix quae in mediocri sua quantitate est $\frac{1}{2} n^2$ variari debet in triplicata ratione distantiae Solis reciproce, si excentricitas terrestris orbitae vocetur ω, termini omnes in quibus quantitas n^2 occurrit, minuendi erunt in ratione $1 - 3\,\omega\,.\,\text{Cos.}\, n z : 1$. Tertio si π sit Sinus inclinationis Lunaris orbitae ad eclipticam, & motus Solis ad motum nodi se habeat ut $n : m$, iidem termini, ob varium nodorum locum, rursus minuendi erunt in ratione $1 - \frac{3}{4}\pi^2 + \frac{3}{4}\pi^2.$ $\text{Cos.}\,(2 n z + 2 m z) : 1$. insuper in expressione temporis, quo angulus dz absolvitur, loco $b^2 dz$, scribere oportebit $(b + t)^2 dz$: & quia actione virium radio vectori perpendicularium immutatur velocitas projectionis, haec alia temporis expressio augenda erit in ratione imminutae velocitatis, sive in ratione $1 : 1 - \int.\, \frac{3}{2}$ $n^2 (b + t)^3 dz\,.\,\text{Sin.}\,(2 z - 2 n z) - \int.\, \frac{3 n^2}{8 a} (b + t)^3$ $dz\,.\,\text{Sin.}\,(z - n z)$. Habitis denique considerationibus hisce omnibus, eadem calculi methodo ac serie,

tempus omne quo angulus $d\,z$ absolvitur, & anomalia media Z accuratius inveniri poterit, ac facile postmodum erit anomaliam veram ex valore mediae derivare.

XIII.

Hoc dato si excentricitas terrestris orbitae cum Caillio, & Majero statuatur 0, 0168, aequatio Lunae quae pendet ex loco Terrae, quaeque annua idcirco dicitur, prodibit circiter $12\frac{1'}{2}$ Sin. $n\,z$, sive etiam $12\frac{1'}{2}$. Sin. Y, si anomalia media Terrae vocetur Y: & pariter si inclinatio media Lunaris orbitae ad eclipticam statuatur $5^\circ\ 9'\ 8''$, & sit X media distantia Lunae a Sole, & S distantia media Lunae a nodo, facile patebit aequationem ortam ex vario nodorum loco, & inclinatione Lunaris orbitae ad eclipticam esse $-47''$. Sin. $(2\,n\,z + 2\,m\,z)$, sive $-47''$. Sin. $(2\,S - 2\,X)$. At vero in corrigendis coëfficientibus aliarum aequationum, quae habent pro argumentis $2\,z - 2\,n\,z$, $z - 2\,n\,z$, & $2\,n\,z$, sive $2\,X$, $2\,X - Z$, & $2\,X - 2\,Z$, calculus omnis, ob magnum exiguorum terminorum numerum, tam fit implexus, ut fere calculatoris patientiam fugiat. Quare cum non adhuc

videam quomodo calculus ad commodiorem formam reduci debeat, poſt priorem Lunaris orbitae correctionem, cognitis jam praecipuis aequationum nominibus, atque argumentis, ad coëfficientes ſingulos accuratius determinandos, interim mallem ſubſidia, & compendia illa proponere, quae extra calculi ſeriem haberi poſſunt.

XIV.

In primis autem manifeſtum eſt, quod cum aequatio -2φ. Sin. $Z + \frac{5}{4}\varphi^2$. Sin. $2Z$ &c., quae dici ſolet aequatio centri, eadem ſit, quae haberetur ſi Luna ſublatis viribus perturbatricibus ellipſim circa Terram in foco poſitam deſcriberet, & conſtans ellipſeos excentricitas eſſet φ, & anomalia media Z a dato loco ſummae apſidis ſupputaretur; aequatio alia -2π. Sin. $(z - 2nz)$, quae etiam dicitur evectio, eadem eſt, quae haberetur ſi prior ellipſis ſic variaretur pro varia Solis diſtantia a loco apogaei medio, ut quidem media excentricitas eſſet φ, ſed tamen vera excentricitas ad tempus datum eſſet $\varphi + \pi$. Cos. $2nz$, & Sinus aberrationis apſidum a loco medio eſſet $\frac{\pi.\,\text{Sin.}\,2nz}{\varphi + \pi.\,\text{Cos.}\,2nz}$, quemadmodum in Obſerv. I., & in Prop. XV. Lib. III.

explicatum eſt . Deinde patet aequationem Δ. Sin. $(2z - 2nz)$, quae ſimpliciter variatio dicitur, reſpondere alteri ellipſi circa Terram veluti centrum deſcriptae, in qua pergendo a ſyſigiis ad quadraturas augeatur radius vector, & velocitas projectionis juxta Propos. III. minuatur in duplicata ratione Sinus diſtantiae Lunae a Sole $z - nz$. Manifeſtum eſt inſuper, juxta Propos. V., aequationem $-\frac{3nN}{8a}(2N + 3 - Nn)$. Sin. $(z - nz)$, quae dici ſolet variatio ſecunda, exhiberi poſſe ſi intelligamus ellipſim hanc poſteriorem quantitate $\frac{3n}{16a}(2N + 3)$ Solem & ſyſigias verſus tranſponi, & projectionis velocitatem quantitate $\frac{3n^2N}{8a}$. Cos. $(z - nz)$ majorem eſſe quam in ellipſi, quae circa Terram, veluti centrum, aut focum deſcriberetur.

XV.

Quod ſi igitur elementa illa, quae ex Theoria minime pendent, mediae excentricitatis Lunaris orbitae, & excentricitatis maximae aut minimae, ſumamus ex obſervationibus, ac fiat $\varphi = 0,05505$, & $\pi = 0,01168$, poſita ut antea aequatione centri, erit maxima aberratio apſidum a loco medio $12° \ 15'$, & Lunae evectio evadet $-1° \ 20' \ 18''$. Sin. $(z - 2nz)$. Deinde vero,

per Propos. IV. Libri ejusdem tertii, semi-diameter mediocris ellipseos alterius Terrae concentricae ad differentiam semi-axis majoris, seu minoris se habebit ut $1 : \frac{3}{2} n^2 N^2 . \frac{N+1}{4-N^2}$ ac fiet Lunae variatio $35' 12''$. Sin. $(2z - 2nz)$: quae quantitas accuratior censeri debet, quod si in Coroll. II. Propos. II. quantitatum etiam inferioris ordinis habeatur ratio, adhuc emergat eadem proportio radiorum ellipticam orbitam osculantium in syzigiis, & quadraturis. Quare cum aequatione centri per evectionem, & variatione per aequationem centri correcta, juxta Propos. XXVIII., & XXIX., prodeant insuper aequationes $5' 31 \frac{1}{2}''$. Sin. $(2z - 2nz)$, & $\mp 3' 52''$. Sin. $(2z - 2nz \pm z)$, ac sit Lunae reductio ad eclipticam $-23''$. Sin. $(2z - 2nz)$, acceptis ut antea litteris X, & Z, erunt correctae aequationes $-1° 16' 26''$. Sin. $(2X - Z) - 3' 27''$. Sin. $(2X + Z) + 40' 20''$. Sin. $2X - 1' 24''$. Sin. X.

XVI.

In Luna ob quantitatem excentricitatis potior est aequatio centri, & evectio, in Satellitibus autem Jovis, ob fere concentricas orbitas, potiores sunt aequationes, quae primae, & secundae variationi Lunae

respondent. Et quidem cum Jovis Satellitibus ad se invicem relatis ratio revolutionis synodicae ac periodicae a dupla parum deficiat, & $4 - N^2$ sit quantitas valde exigua; aequatio primi Satellitis quae oritur ex secundo, dimidii gradus, & aequatio secundi, quae ex tertio oritur gradus integri in octantibus esse poterit, si quantitates materiae in Jove, & secundo, ac tertio Satellite sint 1; 0. 000022; 0, 000092, ut in Propos. XXXIV. explicatum est. Vidimus etiam quod aequationes maximae, quae in Jove ex Saturni actione, & in Marte, ac Terra ex Jovis actione ortum ducunt, & proportionales sunt Sinui duplae distantiae Planetae attrahentis, debent esse ordine $3' 36''$; $14''$; & $2\frac{2''}{3}$: quae omnia cum aliis Majeri, Clairautii, Bailii, & Landii numeris sic congruunt, ut ad tabulas condendas pro dato quolibet distantiae angulo unica tantum multiplicatione opus sit. Dictum est insuper quod variatione Lunae per aequationem annuam, & aequationem medii motus apsidum correcta, ac simili modo evoluta aequatione centri, & reductione omni ad eclipticam, aliae aequationes medii motus Lunae in longitudinem esse debent circiter

$1' 4''. \mathrm{Sin.} (2X - Y) - 1' 20''. \mathrm{Sin.} (2X - Y) \pm 1' 47''. \mathrm{Sin.} (Z \pm Y) \pm 15''. \mathrm{Sin.} (2Z \pm Y) + 6' 51''. \mathrm{Sin.}\, 2S + 46''. \mathrm{Sin.} (2S + Z) - 1'. \mathrm{Sin.} (2S - Z) + 2' 14''. \mathrm{Sin.} (2X - Z - Y) + 2' 5''. \mathrm{Sin.} (2X - Z + Y)$

XVII.

Ad aequationes latitudinis quod pertinet, in Coroll. I. Propos. xxv. Lib. III. poſt traditas aequationes omnes medii nodorum motus, & mediae inclinationis Lunaris orbitae ad eclipticam, indicavi quomodo motus Lunae in latitudinem poſſit ſupputari, correctam ſcilicet inclinationem Lunaris orbitae ducendo in Sinum diſtantiae mediae Lunae a nodo. Modo cum indicatum calculum abſolverim, inveni quod ſi media inclinatio ex nuperrimis obſervationibus ſtatuatur 5° 9′ 8″, correcta latitudo Lunae eſſe debet

$$5^\circ 8' 29''. \mathrm{Sin.}\, S + 8' 48''. \mathrm{Sin.} (2X - S) \mp 26'. \mathrm{Sin.} (S \pm Y) - 13''. \mathrm{Sin.} (S - Z) + 4\tfrac{1''}{4}. \mathrm{Sin.} (S + Z) + 8\tfrac{4''}{5}. \mathrm{Sin.} (2X - S + Y) - 20\tfrac{1''}{4}. \mathrm{Sin.} (2X - S - Y) + 3\tfrac{1''}{4}. \mathrm{Sin.} (2X - S + Z) + 3''. \mathrm{Sin.} (2X - S - Z)$$

Tertiam & quintam ex novem hiſce aequatio nibus non attigit Clairautius, quartam vero duntaxat ſtatuit $- 10''. \mathrm{Sin.} (S - Z)$, eo quod loco diſtantiae mediae S Lunae a nodo in conſtruendis tabulis adhibuerit diſtan-

tiam mediam ope aequationis menſtruae $2' \; 5''$. Sin. Z, & annuae $-10' \; 23''$. Sin. Y correctam. Primae, ſecundae, & ſextae aequationis coëfficientes iidem fere ſunt qui apud CLAIRAUTIUM, & MAJERUM in Londinenſi editione tabularum, quam Grenovicii in Anglia cum eſſem videre licuit. Aequationum trium poſteriorum coëfficientes apud CLAIRAUTIUM ſunt $23\frac{2''}{3}$; $9\frac{1''}{2}$; $17''$, apud MAJERUM $3.7''$; $2.2''$; & $15''$.

XVIII.

His itaque omnibus compendiis aequationes motus Lunae in longitudinem ac latitudinem, quaeque apogaei, & nodorum motum, ac variationem inclinationis orbitae reſpiciunt, ſupputari poſſunt facillime, & calculus adeo eſt ſimplex, ut per ſe ipſum quiſque numeros omnes perſequi, atque in coeleſti Phyſica brevi erudiri poſſit. Altera autem methodus, quam initio hujus opuſculi propoſueram, cum incommodum habeat calculi prolixioris, tum etiam pluribus commodis ſe ſe commendat, ut quod maxime omnium directa ſit, quod veram radii vectoris, & motus medii quantitatem exhibere poſſit ultra quoſcumque correctionis limites, quodque una ſimul operatione inaequalitates Lunae omnes attingat, nec dubium ullum relinquat

an quae ſingillatim quaeruntur afficiant ſe ſe invicem ac turbent. Primo enim ipſe rei ordo videtur poſtulare ut definiantur vires juxta vectorem radium exercitae, ſive quae ex mutua attractione profluunt, ſive quae exſurgunt ex motu projectonis, quaeque cum in partem a centro averſam tendant, appellantur vires centrifugae. Datis viribus omnibus quibus Luna juxta vectorem radium aſcendit, aut deſcendit, cum vis acceleratrix ducta in elementum temporis aequetur elemento ſpatii percurſi, tempus autem data velocitate projectionis proportionale ſit areae deſcriptae, & velocitate aucta vel imminuta varietur in ratione eadem reciproca; illico exſurget differentialis aequatio problematis, atque integrando patebit quod incrementum, aut decrementum vectoris radii haberi debeat. In ea vero radii vectoris expreſſione nonnulli occurrent termini exigui, qui eamdem, quae quaeritur, differentiam diſtantiae a centro involvent: unde valorem primo erutum ſubſtituendo, & terminos alios ex aliis corrigendo ad verum radii vectoris valorem accedere quiſque poterit quantum voluerit. Hoc poſito cum motus angularis data velocitate projectionis ſit ut quadratum vectoris radii reciproce, & dato vectore

radio varietur in ſimplici ratione velocitatis; nova integratione colligentur aequationes ſingulae medii motus, quae verae luminarium diſtantiae ab invicem, & a nodis, ac ſumma apſide reſpondent; nec niſi ſolitis ſubſtitutionibus erit opus, ut aequationum argumenta convertantur in alia totidem, quae non quidem veras ab iiſdem locis diſtantias, ſed medias tantum deſignent. Quare cum in nova hujuſmodi ſolutione non niſi prolixitas calculi occurrat, quam piget modo Typographi patientiae committere, cumque in dies etiam, interim dum haec eduntur, plura compendia ſe ſe offerant, quibus calculus in ſimpliciorem formam contrahatur, polliceri auſim me brevi totam ſolutionem problematis prolaturum, in qua nihil neque ad rigorem, neque ad ſimplicitatem deficere videatur.